УДК 519.5

ПРОГРЕССИВНОСТЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ

С.А. Пиявский

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара, Россия
spiyav@mail.ru

Аннотация

Обсуждается понятие прогрессивности многокритериальных альтернатив на фоне контекста. Предлагаются три суждения относительно прогрессивности альтернатив, согласие с которыми лица, принимающего решения, позволяет ему осуществить наилучший выбор.

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, принятие решений, ЛПР, прогрессивность альтернативы, контекст.*

Введение

Понятийный аппарат, используемый в процессе принятия оптимальных решений, непрерывно растет. Это вызвано увеличением сложности решаемых практических задач и связанным с этим расширением фронта теоретических исследований. В [1] нами предложено дополнить онтологию теории принятия решений двумя новыми понятиями: *расширенной Парето-оптимальности прогрессивных решений* и *уверенных суждений ЛПР*. Показано, что первое из них позволяет сузить пространство выбора, а второе – осуществить выбор наилучшей из многокритериальных альтернатив при минимально возможном включении субъективизма лица, принимающего решение. В настоящей статье в русле тех же идей вводится еще одно новое понятие: ***уровня прогрессивности*** как комплексной скалярной характеристики многокритериальных альтернатив. Оно позволяет предложить убедительный и, главное, доступный пониманию ЛПР любого уровня подготовки, метод выбора наилучшей альтернативы.

1 Прогрессивность как вектор

Классически принятие многокритериальных решений рассматривается как задача выбора «наилучшей» из n альтернатив (решений) $Y = \{y_i\}_{i=1,\dots,n}$, описываемых m-мерным вектором критериев $f = \{f^j\}_{j=1,\dots,m}$. Мы предлагаем взглянуть на ту же математическую модель шире, что более адекватно описывает взгляд лица, принимающего решение (ЛПР). Никогда, по крайней мере, в технико-экономической сфере, ЛПР не рассматривает подлежащие выбору альтернативы автономно, изолированно от общей ситуации в соответствующей отрасли, без сопоставления с аналогами и прототипами. Такой расширенный взгляд на проблему позволяет при той же математической модели предложить новые методы выбора решений, более органичные для ЛПР. Достаточно лишь иметь в виду, что множество Y является не множеством *вариантов* решений, а ***контекстом***, на фоне которого происходит принятие решения. Контекст может включать, помимо аналогов и прототипов, и воображаемые идеальные объекты, которые введены лишь для того, чтобы охарактеризовать на языке критериев состояние той сферы реальности, в которой происходит принятие решения. Альтернативы, т.е. варианты решения, из которых должен быть произведен непосредственный выбор, являются лишь частью контекста. Чтобы подчеркнуть это различие, будем говорить об ***объектах*** и ***альтернативах*** как о сущностях одной природы, характеризуемых значениями вектора критериев f и различающихся лишь тем, что *выбор* осуществляется ЛПР-ом исключительно из числа альтернатив.

Примем для определенности, что значения критериев количественны, а желательным является минимальное значение каждого критерия. Тогда контекст задачи принятия решений задается совокупностью чисел $F = \{f_i^j\}_{i=1,...,n;\ j=1,...,m}$, где n - число объектов.

Исходя из того, что контекст характеризует состояние области принятия решений, естественно использовать единообразное нормирование критериев в пределах от 0 до 1, которое указывает достижимые пределы их изменения в данном контексте. Будем впредь полагать, что критерии нормированы именно таким образом.

Совокупность эффективных по Парето объектов задает *границу эффективности*, разделяющую все критериальное пространство на два подпространства: точки одного из них эффективны по Парето, другого – неэффективны. При добавлении новой Парето-оптимальной точки эта граница как бы продвигается в сторону бóльшей эффективности решений. Это дает основания оценивать каждую Парето-оптимальную точку с позиций того, насколько далеко она продвигает «в лучшую сторону» границу эффективности. Как предложено в [1], назовем характеристику этого продвижения ***прогрессивностью*** соответствующего Парето-оптимального объекта (или соответствующей ему Парето-оптимальной точки в критериальном пространстве) относительно совокупности всех остальных Парето-оптимальных объектов. Предлагается характеризовать прогрессивность каждого Парето-оптимального объекта минимальными отклонениями «в худшую» сторону значений каждого из его критериев, при котором это решение становится неэффективным, т.е. перестает влиять на границу эффективности. Таким образом, прогрессивность отражает тот вклад, который внесет принятое решение в общий технический прогресс. Естественно, что при «равноправии» эффективных по Парето альтернатив ЛПР должен стремиться выбрать ту из них, которая обладает «большей» прогрессивностью. В этом и состоит содержание предложенного нами в [1] ***расширенного принципа прогрессивности Парето***.

Первое *уверенное суждение ЛПР о прогрессивности решения* состоит в согласии с использованием этого принципа. ЛПР должен понимать, что использование любого формализованного метода выбора наилучшей из многокритериальных альтернатив предполагает, что он согласился с гипотезами, лежащими в основе этого метода, и что все они обладают некоторой мерой условности. Мы полагаем, что гипотеза прогрессивности в достаточном числе случаев будет для ЛПР достаточно приемлемой.

Второе *уверенное суждение ЛПР о векторе прогрессивности* относится к способу оценки прогрессивности объектов. Его мы также предложили в [1].

Если не вводить никаких дополнительных соображений, прогрессивность объекта можно рассматривать как m-мерный вектор, каждая компонента которого показывает, на какую величину следует минимально ухудшить (увеличить) значение соответствующего критерия, чтобы решение стало неэффективным. Назовем его *вектором прогрессивности* решения. Отметим, что, в отличие от вектора критериев эффективности, вектор прогрессивности решения определяется не только им самим, но и другими рассматриваемыми с ним в одном контексте объектами. Поэтому будем обозначать вектор прогрессивности объекта y_i как $p_i(F)$.

Переход к совокупности векторов прогрессивности исходных объектов позволяет уменьшить неопределенность в принятии окончательного решения, а иногда и привести к единственной наилучшей альтернативе, за счет того, что некоторые альтернативы оказываются доминируемыми по прогрессивности, как это видно на Примере.

Пример. Таблица 1 определяет простейшую задачу многокритериального выбора. Как видно из рисунка 1, эффективными по Парето являются лишь объекты 1–5.

Таблица 1 – Эффективность объектов в Примере

i	f_i^1	f_i^2
1	0	1
2	0,1	0,5
3	0,4	0,4
4	0,5	0,1
5	0,7	0
6	0,8	0,1
7	1	0,3
8	0,3	0,6

Таблица 2 – Прогрессивность объектов в Примере

i	$p_i^1(F)$	$p_i^2(F)$
1	0,1	0
2	0,3	0,5
3	0,1	0,1
4	0,2	0,3
5	0,3	0,1
6	-0,1	-0,1
7	-0,5	-0,3
8	-0,2	-0,1

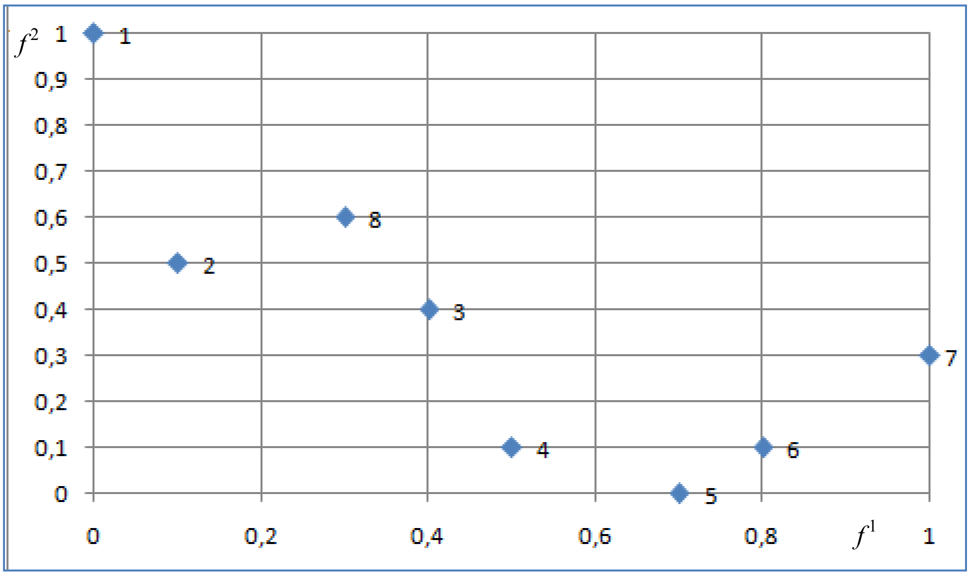

Рисунок 1 – Эффективность объектов в Примере

В таблице 2 показан результат расчета прогрессивности объектов из таблицы 1.

Например, для объекта 2 $p_2^1(F) = 0.3$, так как при увеличении значения первого критерия минимально на эту величину объект перестает быть эффективным (доминируется объектом 5). Аналогично, $p_2^2(F) = 0.5$ (достигает максимально допустимого значения критерия 2).

Напомним, что чем больше компонента вектора прогрессивности, тем «лучше» объект. Соответственно, из рисунка 2 видно, что наиболее прогрессивным является объект 2. За ним следуют несравнимые между собой объекты 4 и 5, каждый из которых доминирует по прогрессивности все остальные объекты. Полная схема доминирования приведена на рисунке 3. Из него следует, что если объект 2 является альтернативой, ЛПР уверенно должен выбрать именно его. Если же он альтернативой не является, то выбор должен быть осуществлен из альтернатив, расположенных выше других на рисунке 3.

В [1] предложена математическая модель, позволяющая рассчитать векторы прогрессивности для каждого объекта из контекста при любом числе критериев.

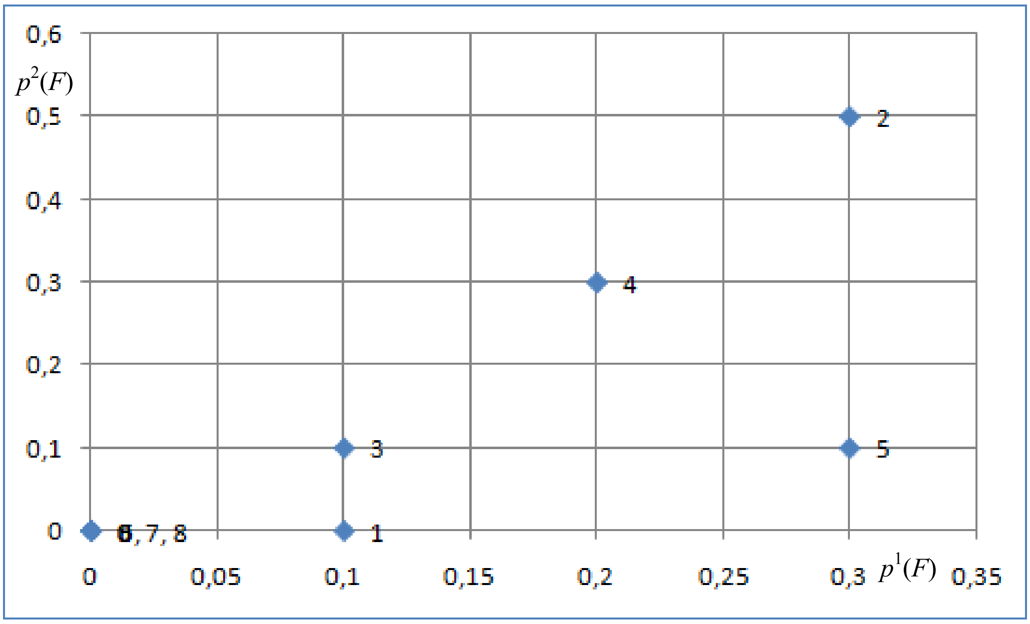

Рисунок 2 – Прогрессивность объектов в Примере

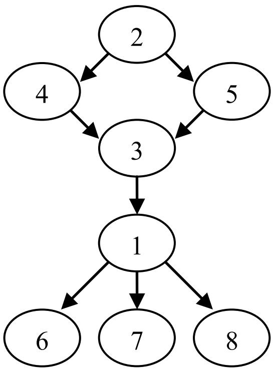

Рисунок 3 – Схема доминирования по прогрессивности объектов в Примере

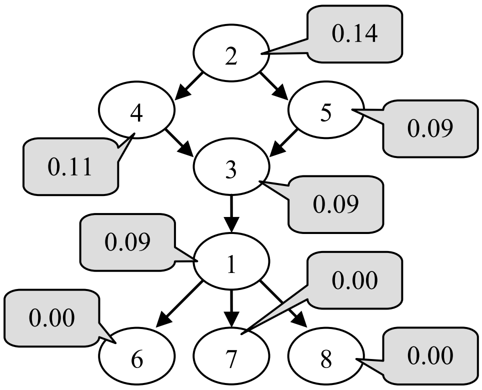

Рисунок 4 – Уровень прогрессивности объектов в Примере

2 Уровень прогрессивности

Безусловно, расширенный принцип прогрессивности Парето не гарантирует полной упорядоченности альтернатив, поэтому заманчиво предложить *числовую* характеристику степени прогрессивности объектов в контексте. Большинство существующих методов сравнения многокритериальных альтернатив решает подобную задачу, используя различные свертки частных критериев в некоторую комплексную эффективность. При этом правило свертывания включает ряд числовых параметров, отражающих специфику задачи. Уязвимым местом такого подхода является необходимость «привязать» типовую структуру свертки к специфике конкретной задачи. Предполагается, что это делает ЛПР, тем или иным способом назначая настроечные параметры. Так, при линейной свертке это весовые коэффициенты, которые показывают сравнительную важность различных частных критериев с точки зрения ЛПР.

Покажем, что понятие прогрессивности позволяет предложить алгоритм расчета единственной адекватной числовой характеристики эффективности объекта в конкретном контексте, не привлекая дополнительных сведений от ЛПР, поскольку сам контекст достаточно полно характеризует проблему.

Выберем структуру свертки частных критериев $f = \{f^j\}_{j=1,...,m}$ в форме Гермейера [2], поскольку она, в отличие от более широко распространенной линейной свертки, позволяет идентифицировать *любую* Парето-оптимальную альтернативу:

$$
(1) \qquad \begin{aligned} & z_i(x) = \max_{j=1,...,m} x^j f_i^j, \\ & x = (x^1,...x^m), \quad x^j > 0, \quad j = 1,...,m, \ \max_{j=1,...,m} x^j = 1. \end{aligned}
$$

В соотношении (1) вектор весовых коэффициентов x отражает сравнительные предпочтения ЛПР в отношении отдельных критериев эффективности. Обозначим через $z_{-k}(x)$ значение свертки, отвечающее при данном векторе весовых коэффициентов x лучшему объекту из множества Y при условии, что объект k не рассматривается:

$$
z_{-k}(x) = \min_{\substack{i=1,...,n \\ i \neq k}} z_i(x).
$$

Тогда характеристика прогрессивности объекта k, обозначаемая как $h_k(x)$, определяется формулой

$$
(2) \qquad h_k(x) = z_{-k}(x) - z_k(x),
$$

т.е. как величина, на которую нужно ухудшить (у нас – увеличить), значение комплексного критерия для объекта k, чтобы этот объект не оказалось лучшим во множестве Y при данном векторе весовых коэффициентов. Эта величина показывает, насколько данный объект превосходит остальные объекты, в совокупности определяющие границу эффективности контекста, с позиций комплексного критерия при текущих значениях вектора x.

При других значениях вектора x наиболее прогрессивным может оказаться этот же или иной объект. Назовем ***уровнем прогрессивности объекта*** долю случаев, в которых он оказывается наиболее прогрессивным, при переборе (например, с некоторым шагом) элементов $x \in X$, т.е при «любых» допустимых взглядах на сравнительную важность частных критериев оптимальности.

Учет частичного упорядочения объектов по прогрессивности позволяет сузить исходное множество X, введя ограничения на допустимые значения весовых коэффициентов вида

$$
z_p(x) \geq z_q(x),
$$

если объект q доминирует объект p.

На рисунке 4 показана рассчитанная прогрессивность объектов в Примере (указана в выноске рядом с объектом).

Как видно, прогрессивность объектов, являясь числовой характеристикой, позволяет упорядочить их. Наиболее прогрессивным является объект 2, затем следует объект 4, затем – объекты 5, 3 и 1 с близкой прогрессивностью и далее не являющиеся эффективными по Парето объекты 6 – 8.

Как отмечалось, предложенный метод хорош тем, что не требует от ЛПР никакой дополнительной информации кроме согласия с тем, что чем в большем числе случаев объект оказывается наилучшим по комплексной оценке свертки Гермейера, тем он более перспективен. В этом состоит третье ***уверенное суждение ЛПР об уровне прогрессивности***.

3 Простая оценка уровня прогрессивности

Наряду с изложенным выше способом расчета уровня прогрессивности объекта может быть предложен более простой и понятный ЛПР способ его оценки. Любой элемент пространства критериев находится в одном из трех состояний:

А) доминируется одним из объектов контекста;

Б) доминируется только объектом, уровень прогрессивности которого оценивается;

В) не доминируется никаким объектом.

Естественно считать, что чем большую долю элементов критериального пространства доминирует исключительно данный объект, т.е. чем на большую величину он распространяет зону доминируемых объектов, тем выше его прогрессивность. В этом состоит простая версия третьего ***уверенного суждения ЛПР об уровне прогрессивности***. В соответствии с ней, уровень прогрессивности есть отношение меры объектов типа Б к мере всего критериального пространства.

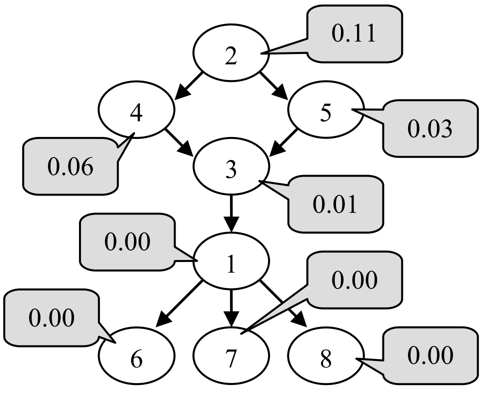

Рисунок 5 – Уровень прогрессивности объектов в Примере при простой оценке

На рисунке 5 показан уровень прогрессивности объектов в Примере при простой оценке.

Численно он отличается от расчета с использованием свертки Гермейера, потому что исходит из иного понимания уровня прогрессивности, однако приоритетность объектов по прогрессивности сохраняется и полностью соответствует взаимному доминированию эффективных альтернатив по приоритетности. Более того, он позволяет более дробно их оценить, что отражает известную «неуклюжесть» свертки Гермейера.

Заключение

Любая сколь-нибудь серьезная задача принятия решений в технике, экономике, социальной сфере основана на глубоком анализе предшествующего опыта и перспектив. Поэтому введение в классическую постановку математической задачи понятия контекста и связанного с ним понятия прогрессивности альтернативы позволило предложить новый взгляд на проблему. С этих позиций оказалось не только возможным установить отношение доминирования между Парето-оптимальными альтернативами, но и предложить приемлемую для ЛПР скалярную оценку перспективности многокритериальных альтернатив, не требуя от него дополнительной информации (которую, по самому смыслу задачи многокритериального выбора, он не мог бы дать, потому что, если бы мог, то дал бы *до* ее постановки). Позиция ЛПР при этом заключается в том, что наилучшей является альтернатива, обладающая большей прогрессивностью, т.е. в наибольшей степени опережающая контекст, на фоне которого принимается решение.

Список источников

[1] ***Пиявский, С.А.*** Два новых понятия верхнего уровня в онтологии многокритериальной оптимизации / С.А. Пиявский // Онтология проектирования. – 2013. - №1(7). – С. 65-85.

[2] ***Гермейер, Ю.Б.*** Введение в теорию исследования операций / Ю.Б. Гермейер. - М.: Наука, 1971. – 383 с.

PROGRESSIVITY OF MULTICRITERIA ALTERNATIVES

S.A. Piyavsky
Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, Russia
spiyav@mail.ru

Abstract
The paper describes the concept of multicriteria alternatives progressivity in a particular context background. Three judgments about the alternatives progressivity are proposed. Acceptance of those judgments allows the decision-maker to carry out the best choice
Keywords: *multicriteria optimization, decision making, DMP, progressivity of alternatives, context.*

References

[1] ***Piyavsky S.A.*** Dva novykh ponyatiya verkhnego urovnya v ontologii mnogokriterial'noj optimizatsii [Two new top-level concepts in the ontology of multiobjective optimization]. Ontologiya proektirovaniya [Ontology of designing], 2013, no. 1(7), pp. 65-85. (In Russian)
[2] ***Germejer YU.B.*** Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsij [Introduction to Operations Research]. Moscow: Nauka, 1971, 383 p. (In Russian)

Сведения об авторе

Пиявский Семен Авраамович. Окончил факультет летательных аппаратов Куйбышевского авиационного института в 1964 году, аспирантуру при кафедре Динамики полета Московского авиационного института им. С.Орджоникидзе в 1967 году. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Самарского государственного архитектурно-строительного университета. Почетный работник высшей школы РФ, академик Академии наук о Земле и Академии нелинейных наук. Опубликовал более 350 научных работ в области системного анализа, методов оптимизации и принятия решений, математического моделирования, образовательных систем и технологий. Основные научные результаты: онтологии образовательного процесса, методы многоэкстремальной оптимизации, решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, принятия решений в условиях неустранимой неопределенности, теория многоцелевых систем, компьютерная технология технического творчества и др.

Semen Avraamovich Piyavsky. Graduated from aircraft Kuibyshev Aviation Institute in 1964 and the graduate school at the Flight Dynamics Department at the Moscow Aviation Institute Ordzhonikidze in 1967. Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science at Samara State University of Architecture and Civil Engineering. Honored Worker of Higher School of Russia, Academician of the Academy of Earth Sciences and Academy of Nonlinear Sciences. He has published over 350 scientific papers in field of system analysis, optimization techniques and decision-making, mathematical modeling, education systems and technologies. Basic scientific results: education ontologies, Multiple-optimization techniques, solution of boundary value problems for systems of ordinary differential equations, decision making under fatal uncertainty, computer technology of engineering creation, etc.