УДК 519.61

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

В.И. Левин

Пензенский государственный технологический университет, Пенза, Россия
vilevin@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрены задачи, связанные с вычислением производных от интервально-определённых функций. Эти задачи актуальны при изучении систем с той или иной степенью неопределённости (недетерминированные системы). Рассматриваются простейшие системы, описываемые элементарными интервально-определёнными функциями. Решаются задачи вычисления производных от элементарных интервально-определённых функций. Приведены основные определения, связанные с производными от интервально-определённых функций, и формулы двух типов, которые позволяют вычислять указанные интервальные производные. Формулы первого типа выражают производные в закрытой интервальной форме, которая для вычисления требует использования аппарата интервальной математики. Формулы второго типа выражают производные в открытой интервальной форме, т.е. в форме двух формул, первая из которых выражает нижнюю границу интервала, представляющего производную, а вторая – верхнюю границу интервала. В такой форме вычисление производной от интервально-определённой функции сводится к вычислению двух обычных функций. Получены производные для ряда элементарных интервальных функций: интервальной константы, степенной функции, показательной функции, экспоненциальной функции, логарифмической функции, функции натуральный логарифм, тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций. Формулы всех производных представлены в открытой интервальной форме. Показано отличие производных интервальных элементарных функций от производных соответствующих неинтервальных элементарных функций.

Ключевые слова: *интервал, интервальная функция, интервальные вычисления, интервальная производная, интервально-дифференциальное исчисление, интервальные элементарные функции.*

Цитирование: *Левин, В.И.* Дифференциальное исчисление интервальных элементарных функций и принятие решений / В.И. Левин // Онтология проектирования. – 2016. – Т.6, №3(21). - С. 340-354. – DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-3-340-354.

Введение

Проектирование и анализ свойств разнообразных систем требует соответствующего, адекватного рассматриваемой задаче, математического аппарата. Встречающиеся на практике системы часто характеризуются той или иной степенью неопределённости (недетерминированы). Для исследования и построения таких систем обычно применяют специализированный математический аппарат – теорию вероятностей, нечёткие множества, интервальную математику [1–3].

В работах [4, 5] автором был предложен новый математический аппарат для проектирования и исследования недетерминированных систем – недетерминистское (интервальное) дифференциальное исчисление. Этот аппарат является аналогом классического дифференциального исчисления Ньютона–Лейбница [6]. Он позволяет переносить основные идеи классического дифференциального исчисления на неполностью определённые функции, задаваемые с точностью до интервалов возможных значений переменных. Однако, несмотря на сходство основных исходных идей двух исчислений, предложенное интервальное дифференциальное исчисление по форме не похоже на классическое дифференциальное исчисление Ньютона–

Лейбница, что является следствием неопределённости интервальных функций, обычно фигурирующих в интервальной математике. Кроме того, предложенное интервальное дифференциальное исчисление, по нашему мнению, более адекватно природным явлениям и процессам, чем классическое дифференциальное исчисление [7].

1 Постановка задачи

Согласно классическому дифференциальному исчислению [6], нахождение производной от любой функции базируется на: 1) представлении этой функции в виде соответствующей суперпозиции так называемых элементарных функций; 2) переходе в полученном представлении от функций к их производным, с использованием для этого основных теорем дифференциального исчисления (производная суммы функций, производная произведения функций и т.д.); 3) подстановке выражений производных элементарных функций.

Процедура, сходная с описанной, может быть полезна и при нахождении производных от интервальных функций, рассматриваемых в интервальном дифференциальном исчислении. При этом необходимо учитывать большое отличие свойств и форм представления обычных и интервальных функций и производных от них. Задачами статьи являются: 1) составление полного набора производных от всех интервальных элементарных функций; 2) выявление различий производных от интервальных элементарных функций и производных от детерминированных элементарных функций.

Интервальное дифференциальное исчисление может быть использовано для исследования поведения неполностью определённых функций, служащих характеристиками недетерминированных систем, при принятии решений на этапе проектирования таких систем. Эта ситуация аналогична использованию классического дифференциального исчисления при исследовании поведения функций, являющихся характеристиками детерминированных систем.

При решении задачи будем использовать в качестве вспомогательных сведений основные математические сведения из алгебры интервальных чисел [3, 4]. В этой алгебре оперируют интервальными числами (операндами), операциями над интервальными числами и интервальными функциями [4, 5, 7].

2 Математический аппарат

Базовое для данной статьи понятие интервальной функции [4, 5, 7] вводится как однозначное отображение множества $\{\tilde{x}\}$ замкнутых вещественных интервалов $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ на множество $\{\tilde{y}\}$ замкнутых вещественных интервалов $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ того же вида. Символически интервальная функция записывается в виде

(1) $$\tilde{y}=f(\tilde{x}) \text{ или } \tilde{y}=[y_1,y_2]=[f_1(\tilde{x}),f_2(\tilde{x})],$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная, $\tilde{f}=[f_1,f_2]$ – интервальная функция, с её нижней f_1 и верхней f_2 граничными функциями. Второе базовое понятие, используемое далее, – понятие предела интервальной функции.

Независимая интервальная переменная $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ интервальной функции (1) по определению неограниченно приближается к некоторому интервалу (пределу) $\tilde{x}^\circ=[x_1^\circ,x_2^\circ]$, если в процессе указанного изменения x_1 неограниченно приближается к x_1°, а x_2 к x_2°. Символически это записывается в виде

(2) $$\tilde{x}\to\tilde{x}^\circ \equiv (x_1\to x_1^\circ, x_2\to x_2^\circ).$$

Аналогично определяется неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ интервальной функции (1) к интервалу (пределу) $\widetilde{y}^{\circ}=[y_1^{\circ},y_2^{\circ}]$:

(3) $$\widetilde{y}\to\widetilde{y}^{\circ}\equiv(y_1\to y_1^{\circ},y_2\to y_2^{\circ}).$$

Если независимая интервальная переменная $\widetilde{x}$ своим неограниченным приближением к интервалу-пределу $\widetilde{x}^{\circ}$ вызывает неограниченное приближение зависимой интервальной переменной $\widetilde{y}$ к интервалу-пределу $\widetilde{y}^{\circ}$, то говорим, что предел интервальной функции (1) при $\widetilde{x}$, стремящемся к $\widetilde{x}^{\circ}$, равен $\widetilde{y}^{\circ}$:

(4) $$\lim_{\widetilde{x}\to\widetilde{x}^{\circ}}\widetilde{y}=\widetilde{y}^{\circ} \quad \text{или} \quad \lim_{\widetilde{x}\to\widetilde{x}^{\circ}}\widetilde{f}(\widetilde{x})=\widetilde{y}^{\circ}.$$

Если интервальная функция $\widetilde{f}$ (1) непрерывна, т.е. её нижняя f_1 и верхняя f_2 граничные функции есть непрерывные функции нижней x_1 и верхней x_2 границ независимой переменной $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, то предел функции $\widetilde{f}$ равен её значению в предельной точке $\widetilde{x}^{\circ}$ аргумента $\widetilde{x}$, или символически

(5) $$\lim_{\widetilde{x}\to\widetilde{x}^{\circ}}\widetilde{f}(\widetilde{x})=\widetilde{f}(\widetilde{x}^{\circ}).$$

Основное понятие интервальной производной вводится аналогично понятию обычной производной функции [6]. Рассмотрим произвольную интервальную функцию $\widetilde{f}$ вида (1). Будем считать её непрерывной. Зафиксируем значение независимой переменной $\widetilde{x}=\widetilde{x}^{\circ}=[x_1^{\circ},x_2^{\circ}]$. Этому значению, в силу непрерывности функции, соответствует фиксированное значение самой функции $\widetilde{y}^{\circ}=\widetilde{f}(\widetilde{x}^{\circ})$. Определим приращение независимой и зависимой переменных функции относительно этих фиксированных значений

(6) $$\Delta\widetilde{x}=\widetilde{x}-\widetilde{x}^{\circ},\quad \Delta\widetilde{y}=\widetilde{y}-\widetilde{y}^{\circ}=\widetilde{f}(\widetilde{x})-\widetilde{f}(\widetilde{x}^{\circ})$$

и составим отношение второго приращения к первому

(7) $$\Delta\widetilde{y}/\Delta\widetilde{x}=(\widetilde{y}-\widetilde{y}^{\circ})/(\widetilde{x}-\widetilde{x}^{\circ})=(\widetilde{f}(\widetilde{x})-\widetilde{f}(\widetilde{x}^{\circ}))/(\widetilde{x}-\widetilde{x}^{\circ}).$$

Предел отношения (7) при неограниченном приближении независимой переменной $\widetilde{x}$ к её фиксированному предельному значению $\widetilde{x}^{\circ}$, если он существует, называется интервальной производной функцией от исходной интервальной функции $\widetilde{f}(\widetilde{x})$ (1) в точке $\widetilde{x}^{\circ}$ и обозначается $\widetilde{y}'_{\widetilde{x}^{\circ}}$ или $\widetilde{f}'_{\widetilde{x}^{\circ}}(\widetilde{x})$. Таким образом,

(8) $$\widetilde{y}'_{\widetilde{x}^{\circ}}\equiv\widetilde{f}'_{\widetilde{x}^{\circ}}(\widetilde{x})=\lim_{\widetilde{x}\to\widetilde{x}^{\circ}}\Delta\widetilde{y}/\Delta\widetilde{x},\quad \text{где } \Delta\widetilde{x},\Delta\widetilde{y} \text{ из (6).}$$

Доказано [4, 5, 7], что для существования у непрерывной интервальной функции $\widetilde{y}=\widetilde{f}(\widetilde{x})$ в точке $\widetilde{x}^{\circ}$ интервальной производной необходимо и достаточно, чтобы в этой точке и некоторой её окрестности как независимая $\widetilde{x}$, так и зависимая $\widetilde{y}$ переменные были существенно интервальными (т.е. не вырождались в точку).

Как и в случае обычной производной, понятие интервальной производной можно обобщить путём повторного выполнения операции взятия производной. При этом из интервальной производной 1-го порядка $\widetilde{y}'_{\widetilde{x}}$ получается интервальная производная 2-го порядка $\widetilde{y}''_{\widetilde{x}}$, а из последней – интервальная производная 3-го порядка $\widetilde{y}'''_{\widetilde{x}}$ и т.д. Согласно введённым определениям интервальной производной любого порядка, все интервальные производные, как и исходная интервальная функция, при любом численном значении аргумента $\widetilde{x}$ в виде интервала возможных значений $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ также принимают численные значения в виде интервала возможных значений. Поэтому вычисление интервальной функции и интервальной производной от неё любого порядка состоит в вычислении нижних и верхних граничных функций соответствующих интервальных функций. Вычисление интервальной функции $\tilde{f}$ выполняется согласно формуле (1), задающей эту функцию в виде пары «нижняя f_1 и верхняя f_2 граничные функции». Вычисление интервальной производной любого n-го порядка $\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}=\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})$ от интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ выполняется с помощью формулы [7]

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}=\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=[\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}),\tilde{f}_{2.,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \tag{9}$$

где $\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}$ и $\tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}$ – соответственно нижняя и верхняя граничные функции интервальной производной $\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}$ n-го порядка от исходной интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$. Эти граничные функции в формуле (9) выражаются в виде

$$\tilde{f}_{1,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=-2^{n-1}(y_2-y_1)/(x_2-x_1)^n,\ \tilde{f}_{2,\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(y_2-y_1)/(x_2-x_1)^n, \tag{10}$$

при этом x_1,x_2 – нижняя и верхняя границы интервальной независимой переменной $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ в точке взятия производной от функции $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$, y_1,y_2 – нижняя и верхняя границы интервальной зависимой переменной $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ этой функции в той же точке. Как следует из выражений (9), (10), интервальная производная любого порядка имеет вид интервала, симметричного относительно нуля. Это позволяет записать выражение интервальной производной любого n-го порядка (9), (10) в более простой форме

$$\tilde{y}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=\tilde{f}_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=[-f_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}),f_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \tag{11}$$

где

$$f_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(y_2-y_1)/(x_2-x_1)^n, \tag{12}$$

а значения x_1,x_2,y_1,y_2 раскрыты в пояснениях к формуле (10).

Формулы (11), (12) позволяют находить интервальные производные любого порядка от любых интервальных функций, в том числе от элементарных интервальных функций.

3 Производные от элементарных интервальных функций

По определению любая элементарная интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(\tilde{x})$ вида (1) получается из соответствующей элементарной вещественной функции $y=f(x)$ путём преобразования в соответствующие интервальные формы независимой переменной $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, зависимой переменной $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ и интервальной функции $\tilde{f}=[f_1,f_2]$. Определение производных от элементарных интервальных функций начнём с простейшей интервальной функции – интервальной константы.

Функция интервальная константа выражается в виде

$$\tilde{y}\equiv\tilde{c}=[c_1,c_2],\quad c_1=\text{const},\ c_2=\text{const},\ c_1<c_2. \tag{13}$$

Из сравнения выражений (13) и (1) видно, что интервальная константа – это интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют следующий вид

$$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=c_1,\quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=c_2. \tag{14}$$

Подставив (14) в общие формулы интервальных производных (11), (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной константы $\tilde{y}=\tilde{c}$ в виде

$$\tilde{y}^{(n)}\equiv\tilde{c}^{(n)}=[c_1,c_2]=[-c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}),c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x})], \tag{15}$$

где

$$c_{\tilde{x}}^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(c_2 - c_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Как видно из (15), интервальная производная любого n-го порядка от интервальной константы $\tilde{c}$ (13) не равна нулю (точнее, нулевому интервалу $\tilde{0} = [0,0]$), в отличие от классической производной от вещественной константы, равной нулю. Более того, эта производная не является постоянной величиной, а существенно зависит от аргумента $\tilde{x} = [x_1, x_2]$. Согласно формуле (15), она существует во всех точках $\tilde{x}$, в которых $x_1 \neq x_2$, и монотонно убывает при увеличении разности $x_2 - x_1$.

Интервальная степенная функция выражается в виде

(16) $$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \tilde{x}^m \equiv [x_1, x_2]^m,$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Будем считать, исходя из физических соображений, что в пределах одной (любой!) решаемой задачи переменная величина $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ может быть только неотрицательной или только неположительной, т.е. выполняется условие

(17) $$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x_1, x_2 \leq 0.$$

Тогда интервальную степенную функцию (16) можно записать в явном интервальном виде посредством следующей формулы:

(18) $$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \begin{cases} [x_1^m, x_2^m], & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ нечётно}; \\ [x_2^m, x_1^m], & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ чётно}. \end{cases}$$

Из сравнения выражения (18) с (1) видно, что интервальная степенная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют такой вид:

(19) $$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^m, & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ нечётно}; \\ x_2^m, & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ чётно}; \end{cases}$$

$$y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^m, & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ нечётно}; \\ x_1^m, & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ чётно} \end{cases}$$

Подстановка (19) в (11) и (12) даёт выражение производной любого n-го порядка от интервальной степенной функции $\tilde{y} = \tilde{x}^m$ (16) в виде

(20) $$\tilde{y}^{(n)} = (\tilde{x}^m)^{(n)} = ([x_1, x_2]^m)^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = \begin{cases} 2^{n-1}(x_2^m - x_1^m)/(x_2 - x_1)^n, & \text{при } x_1, x_2 \geq 0 \text{ или } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ нечётно}; \\ 2^{n-1}(x_1^m - x_2^m)/(x_2 - x_1)^n, & \text{при } x_1, x_2 \leq 0, \ m \text{ чётно}. \end{cases}$$

Как видно из формулы (20), в интервальной производной любого n-го порядка $(\tilde{x}^m)^{(n)}$ от интервальной степенной функции $\tilde{x}^m$ (16) при увеличении n показатель степени m не уменьшается, приближаясь к нулю, в отличие от классической производной от вещественной степенной функции. Интервальная производная $(\tilde{x}^m)^{(n)}$, согласно формуле (20), существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$; она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная показательная функция выражается в виде

(21) $$\tilde{y} = [y_1, y_2] = a^{\tilde{x}} \equiv a^{[x_1, x_2]}, \quad a > 0,$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7] интервальная функция $a^{\widetilde{x}}$ определяется в виде

(22) $$a^{\widetilde{x}}=\{a^x \mid x\in\widetilde{x}\},$$

здесь a^x – исходная обычная показательная функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет записать интервальную показательную функцию (21) в явном интервальном виде с помощью формулы

(23) $$\widetilde{y}\equiv[y_1,y_2]=[a^{x_1},a^{x_2}],\quad a>0.$$

Сравнивая (23) с (1), устанавливаем, что интервальная показательная функция есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой принимают вид:

(24) $$y_1=f_1(\widetilde{x})=f_1(x_1,x_2)=a^{x_1},\quad y_2=f_2(\widetilde{x})=f_2(x_1,x_2)=a^{x_2},\quad a>0.$$

Подставив (24) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной показательной функции $\widetilde{y}=a^{\widetilde{x}}$ (21)

(25) $$\widetilde{y}^{(n)}=(a^{\widetilde{x}})^{(n)}=(a^{[x_1,x_2]})^{(n)}=[-f^{(n)}(\widetilde{x}),f^{(n)}(\widetilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\widetilde{x})=2^{n-1}(a^{x_2}-a^{x_1})/(x_2-x_1)^n .$$

Из (25) видно, что в интервальной производной любого n-го порядка $(a^{\widetilde{x}})^{(n)}$ от интервальной показательной функции $a^{\widetilde{x}}$ (21) при увеличении n перед данной функцией не появляются дополнительные множители $\ln a$, в отличие от классической производной от вещественной показательной функции, у которой указанные множители появляются. Интервальная производная $(a^{\widetilde{x}})^{(n)}$, согласно (25), существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$; она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная экспоненциальная функция выражается в виде

(26) $$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=e^{\widetilde{x}}\equiv e^{[x_1,x_2]},$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (21) и (26) видно, что интервальная экспоненциальная функция (26) есть частный случай интервальной показательной функции (21) при $a=e$. Таким образом, из выражения (25) производной любого n-го порядка от интервальной показательной функции, положив в нем $a=e$, получим следующее выражение производной любого n-го порядка от интервальной экспоненциальной функции

(27) $$\widetilde{y}^{(n)}=(e^{\widetilde{x}})^{(n)}=(e^{[x_1,x_2]})^{(n)}=[-f^{(n)}(\widetilde{x}),f^{(n)}(\widetilde{x})],$$

при этом

$$f^{(n)}(\widetilde{x})=2^{n-1}(e^{x_2}-e^{x_1})/(x_2-x_1)^n .$$

Из (27) видно, что в интервальной производной $(e^{\widetilde{x}})^{(n)}$ любого n-го порядка от интервальной экспоненты $e^{\widetilde{x}}$ (26) при увеличении n изменяется множитель перед экспонентой, равный

(28) $$M=2^{n-1}/(x_2-x_1)^n ,$$

в отличие от классической производной от вещественной экспоненты, у которой такого множителя нет. Интервальная производная $(e^{\widetilde{x}})^{(n)}$, согласно формуле (27), существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная логарифмическая функция выражается в виде

(29) $$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=\log_a\widetilde{x}=\log_a[x_1,x_2]\quad a>0,$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7] интервальная функция $\log_a\widetilde{x}$ определяется в виде

(30) $$\log_a\widetilde{x}=\{\log_a x\,|\,x\in\widetilde{x}\},\quad a>0, a\neq 1,$$

при этом $\log_a x$ – исходная обычная логарифмическая функция, которая монотонно возрастает. Это позволяет записать интервальную логарифмическую функцию (29) в явном интервальном виде посредством формулы

(31) $$\widetilde{y}\equiv[y_1,y_2]=[\log_a x_1,\log_a x_2],\quad a>0, a\neq 1.$$

Сравнивая (31) с (1), приходим к выводу, что интервальная логарифмическая функция – это интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой выглядят как

(32) $$y_1=f_1(\widetilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\log_a x_1,\quad y_2=f_2(\widetilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\log_a x_2,\quad a>0, a\neq 1.$$

Подставляя выражения (32) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной логарифмической функции $\widetilde{y}=\log_a\widetilde{x}$ (29) в виде

(33) $$\widetilde{y}^{(n)}=(\log_a\widetilde{x})^{(n)}=(\log_a[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\widetilde{x}),f^{(n)}(\widetilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\widetilde{x})=2^{n-1}(\log_a x_2-\log_a x_1)/(x_2-x_1)^n,\quad a>0, a\neq 1,$$

или, после потенцирования,

$$f^{(n)}(\widetilde{x})=2^{n-1}\log_a(x_2/x_1)/(x_2-x_1)^n,\quad a>0, a\neq 1.$$

Как видно из (33), в интервальной производной $(\log_a\widetilde{x})^{(n)}$ любого n-го порядка от интервальной функции логарифм $\log_a\widetilde{x}$ исходная логарифмическая функция остаётся логарифмической, в отличие от классической производной от вещественной логарифмической функции $\log_a x$, которая равна $1/x\ln a$, т.е. является рациональной функцией. Интервальная производная $(\log_a\widetilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$, и монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная натуральная логарифмическая функция выражается в виде

(34) $$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=\ln\widetilde{x}=\ln[x_1,x_2],$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Из сравнения (29) и (34) видно, что интервальная натуральная логарифмическая функция (34) есть частный случай интервальной логарифмической функции (29) при $a=e$. Производная любого n-го порядка от интервальной натурально-логарифмической функции представляется в виде

(35) $$\widetilde{y}^{(n)}=(\ln\widetilde{x})^{(n)}=(\ln[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\widetilde{x}),f^{(n)}(\widetilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\widetilde{x})=2^{n-1}\ln(x_2/x_1)/(x_2-x_1)^n.$$

Как видно из (35), интервальная производная любого n-го порядка $(\ln\widetilde{x})^{(n)}$ от интервальной натурально-логарифмической функции $\ln\widetilde{x}$ является натурально-логарифмической, в отличие от производной от обычной натурально-логарифмической функции $\ln x$, которая равна $1/x$ и является рациональной функцией. Найденная интервальная производная $(\ln\widetilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная тригонометрическая функция синус выражается в следующем виде

(36) $\tilde{y}=[y_1,y_2]=\sin\tilde{x}=\sin[x_1,x_2]$,

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7] интервальная функция $\sin\tilde{x}$ определяется в виде

(37) $\sin\tilde{x}=\{\sin x\,|\,x\in\tilde{x}\}$,

здесь $\sin x$ – исходная обычная тригонометрическая функция синус, которая монотонно возрастает на интервале $-\pi/2\le x\le\pi/2$ и принимает все возможные значения от –1 до 1. Последнее позволяет записать интервальную тригонометрическую функцию синус (37) в явном интервальном виде

(38) $\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\sin\tilde{x}=\sin[x_1,x_2]=[\sin x_1,\sin x_2]$.

Сравнивая (38) с (1), заключаем, что интервальная тригонометрическая функция синус есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(39) $y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\sin x_1,\quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\sin x_2$.

Подставляя (39) в (11) и (12), получаем выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\tilde{y}=\sin\tilde{x}$ в виде

(40) $\tilde{y}^{(n)}=(\sin\tilde{x})^{(n)}=(\sin[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})]$,

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\sin x_2-\sin x_1)/(x_2-x_1)^n.$$

Из формулы (40) видим, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\sin\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\sin\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция синус остаётся синусом, в отличие от производной от обычной тригонометрической функции $\sin x$, которая равна $\cos x$. Интервальная производная $(\sin\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная тригонометрическая функция косинус выражается в виде

(41) $\tilde{y}=[y_1,y_2]=\cos\tilde{x}=\cos[x_1,x_2]$,

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7] интервальная функция $\cos\tilde{x}$ определяется в виде

(42) $\cos\tilde{x}=\{\cos x\,|\,x\in\tilde{x}\}$,

здесь $\cos x$ – исходная обычная тригонометрическая функция косинус, которая монотонно убывает на интервале $0\le x\le\pi$, принимая последовательно все свои возможные значения от 1 до –1. Это позволяет записать интервальную тригонометрическую функцию косинус в виде

(43) $\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\cos\tilde{x}=\cos[x_1,x_2]=[\cos x_2,\cos x_1]$.

Сравнивая (43) с (1), получаем, что интервальная тригонометрическая функция косинус является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(44) $y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\cos x_2,\quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\cos x_1$.

Подставляя (44) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\tilde{y}=\cos\tilde{x}$ в виде

(45) $\tilde{y}^{(n)}=(\cos\tilde{x})^{(n)}=(\cos[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})]$,

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\cos x_1-\cos x_2)/(x_2-x_1)^n.$$

Согласно (45), в интервальной производной любого n-го порядка $(\cos\tilde{x})^{(n)}$ исходная тригонометрическая функция косинус остается косинусом, в отличие от производной от вещественной тригонометрической функции $\cos x$, равной $-\sin x$. Интервальная производная

$(\cos\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, где $x_1 \neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная тригонометрическая функция тангенс выражается в виде

(46) $$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\operatorname{tg}\tilde{x}=\operatorname{tg}[x_1,x_2],$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7], интервальная функция $\operatorname{tg}\tilde{x}$ определяется в виде

(47) $$\operatorname{tg}\tilde{x}=\{\operatorname{tg}x \mid x\in\tilde{x}\},$$

причём $\operatorname{tg} x$ – исходная обычная тригонометрическая функция тангенс, которая монотонно возрастает на интервале $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, где она последовательно принимает все свои возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Это позволяет записать интервальную тригонометрическую функцию тангенс (47) в явном интервальном виде

(48) $$\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\operatorname{tg}\tilde{x}=\operatorname{tg}[x_1,x_2]=[\operatorname{tg}x_1,\operatorname{tg}x_2].$$

Сравнив выражение (48) с (1), устанавливаем, что интервальная тригонометрическая функция тангенс есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(49) $$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\operatorname{tg}x_1,\quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\operatorname{tg}x_2.$$

Подставляя (49) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\tilde{y}=\operatorname{tg}\tilde{x}$ в виде

(50) $$\tilde{y}^{(n)}=(\operatorname{tg}\tilde{x})^{(n)}=(\operatorname{tg}[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\operatorname{tg}x_2-\operatorname{tg}x_1)/(x_2-x_1)^n.$$

Формула (50) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\operatorname{tg}\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\operatorname{tg}\tilde{x}$ исходная тригонометрическая функция тангенс остаётся тангенсом, в отличие от классической производной от вещественной тригонометрической функции $\operatorname{tg}x$, равной $1/\cos^2 x$. Интервальная производная $(\operatorname{tg}\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, где $x_1\neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

Интервальная тригонометрическая функция котангенс выражается в виде

(51) $$\tilde{y}=[y_1,y_2]=\operatorname{ctg}\tilde{x}=\operatorname{ctg}[x_1,x_2],$$

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7], интервальная функция $\operatorname{ctg}\tilde{x}$ определяется в виде

(52) $$\operatorname{ctg}\tilde{x}=\{\operatorname{ctg}x \mid x\in\tilde{x}\},$$

здесь $\operatorname{ctg} x$ – исходная обычная тригонометрическая функция котангенс, которая монотонно убывает на интервале $0\le x\le\pi$, где она последовательно принимает все возможные значения от $+\infty$ до $-\infty$. Это позволяет записать интервальную тригонометрическую функцию (52) в явном интервальном виде

(53) $$\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\operatorname{ctg}\tilde{x}=\operatorname{ctg}[x_1,x_2]=[\operatorname{ctg}x_2,\operatorname{ctg}x_1].$$

Сравнивая (53) с (1), видим, что интервальная тригонометрическая функция котангенс есть интервальная функция, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(54) $$y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\operatorname{ctg}x_2,\quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\operatorname{ctg}x_1.$$

Подставляя (54) в (11) и (12), получаем выражение производной любого n-го порядка от интервальной тригонометрической функции $\tilde{y}=\operatorname{ctg}\tilde{x}$ в виде

(55) $$\tilde{y}^{(n)}=(\operatorname{ctg}\tilde{x})^{(n)}=(\operatorname{ctg}[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\widetilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{ctg} x_1 - \operatorname{ctg} x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Выражение (55) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\operatorname{ctg}\widetilde{x})^{(n)}$ от интервальной тригонометрической функции $\operatorname{ctg}\widetilde{x}$ исходная тригонометрическая функция котангенс остаётся котангенсом, в отличие от классической производной от обычной тригонометрической функции $\operatorname{ctg} x$, которая равна $-1/\sin^2 x$. Интервальная производная $(\operatorname{ctg}\widetilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная обратная тригонометрическая функция арксинус выражается в виде

(56) $$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=\arcsin\widetilde{x}=\arcsin[x_1,x_2],$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7], интервальная функция $\arcsin\widetilde{x}$ определяется в виде

(57) $$\arcsin\widetilde{x}=\{\arcsin x \mid x\in\widetilde{x}\},$$

в котором $\arcsin x$ есть исходная обычная обратная тригонометрическая функция арксинус. Последняя монотонно возрастает на интервале $-1\leq x\leq 1$, проходя последовательно все возможные значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию (57) в явном интервальном виде следующим образом

(58) $$\widetilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\arcsin\widetilde{x}=\arcsin[x_1,x_2]=[\arcsin x_1,\arcsin x_2].$$

Сравнивая (58) с (1), устанавливаем, что интервальная обратная тригонометрическая функция арксинус является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(59) $$y_1 = f_1(\widetilde{x}) = f_1(x_1,x_2) = \arcsin x_1, \quad y_2 = f_2(\widetilde{x}) = f_2(x_1,x_2) = \arcsin x_2.$$

Подставив (59) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\widetilde{y} = \arcsin\widetilde{x}$ в виде

(60) $$\widetilde{y}^{(n)} = (\arcsin\widetilde{x})^{(n)} = (\arcsin[x_1,x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\widetilde{x}), f^{(n)}(\widetilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\widetilde{x}) = 2^{n-1}(\arcsin x_2 - \arcsin x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Как видно из формулы (60), в интервальной производной любого n-го порядка $(\arcsin\widetilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\arcsin\widetilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арксинус остаётся арксинусом, в отличие от производной от обычной обратной тригонометрической функции $\arcsin x$, равной $1/\sqrt{1-x^2}$. Производная $(\arcsin\widetilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$, где $x_1 \neq x_2$ и монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная обратная тригонометрическая функция арккосинус выражается в виде

(61) $$\widetilde{y}=[y_1,y_2]=\arccos\widetilde{x}=\arccos[x_1,x_2],$$

где $\widetilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\widetilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7], интервальная функция $\arccos\widetilde{x}$ определяется в виде

(62) $$\arccos\widetilde{x}=\{\arccos x \mid x\in\widetilde{x}\},$$

при этом $\arccos x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккосинус, которая монотонно убывает на интервале $-1\leq x\leq 1$, проходя последовательно все возможные значения от π до 0. Это позволяет записать функцию арккосинус (62) в интервальном виде

(63) $$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \arccos \tilde{x} = \arccos [x_1, x_2] = [\arccos x_2, \arccos x_1].$$

Сравнив выражение (63) с (1), видим, что интервальная обратная тригонометрическая функция арккосинус является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(64) $$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \arccos x_2, \quad y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \arccos x_1.$$

Подставив выражения (64) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y} = \arccos \tilde{x}$ в виде

(65) $$\tilde{y}^{(n)} = (\arccos \tilde{x})^{(n)} = (\arccos [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\arccos x_1 - \arccos x_2)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (65) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\arccos \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\arccos \tilde{x}$ исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккосинус остаётся арккосинусом, в отличие от производной от обычной обратной тригонометрической функции $\arccos x$, которая равна $-1/\sqrt{1-x^2}$. Интервальная производная $(\arccos \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная обратная тригонометрическая функция арктангенс выражается в виде

(66) $$\tilde{y} = [y_1, y_2] = \operatorname{arctg} \tilde{x} = \operatorname{arctg} [x_1, x_2],$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7] интервальная функция $\operatorname{arctg} \tilde{x}$ определяется в виде

(67) $$\operatorname{arctg} \tilde{x} = \{\operatorname{arctg} x \mid x \in \tilde{x}\},$$

в котором $\operatorname{arctg} x$ – исходная обычная обратная тригонометрическая функция арктангенс. Последняя монотонно возрастает на интервале $-\infty < x < \infty$, проходя последовательно все возможные значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$, что даёт возможность записать интервальную обратную тригонометрическую функцию арктангенс (67) в виде

(68) $$\tilde{y} \equiv [y_1, y_2] = \operatorname{arctg} \tilde{x} = \operatorname{arctg} [x_1, x_2] = [\operatorname{arctg} x_1, \operatorname{arctg} x_2].$$

Сравнив выражение (68) с (1), увидим, что интервальная обратная тригонометрическая функция арктангенс является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(69) $$y_1 = f_1(\tilde{x}) = f_1(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} x_1, \quad y_2 = f_2(\tilde{x}) = f_2(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} x_2.$$

Подставив (69) в (11) и (12), найдём выражение производной любого n-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y} = \operatorname{arctg} \tilde{x}$ в виде

(70) $$\tilde{y}^{(n)} = (\operatorname{arctg} \tilde{x})^{(n)} = (\operatorname{arctg} [x_1, x_2])^{(n)} = [-f^{(n)}(\tilde{x}), f^{(n)}(\tilde{x})],$$

где

$$f^{(n)}(\tilde{x}) = 2^{n-1}(\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1)/(x_2 - x_1)^n.$$

Формула (70) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\operatorname{arctg} \tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg} \tilde{x}$ исходная обратная тригонометрическая функция арктангенс остаётся арктангенсом, в отличие от производной от обычной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arctg} x$, которая равна $1/(1+x^2)$. Интервальная производная $(\operatorname{arctg} \tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x} = [x_1, x_2]$, в которых $x_1 \neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности $x_2 - x_1$.

Интервальная обратная тригонометрическая функция арккотангенс выражается в следующем виде

(71) $\tilde{y}=[y_1,y_2]=\operatorname{arcctg}\tilde{x}=\operatorname{arcctg}[x_1,x_2]$,

где $\tilde{x}=[x_1,x_2]$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – интервальная зависимая переменная. Согласно [4, 5, 7] интервальная функция $\operatorname{arcctg}\tilde{x}$ определяется в виде

(72) $\operatorname{arcctg}\tilde{x}=\{\operatorname{arcctg}x\,|\,x\in\tilde{x}\}$,

при этом $\operatorname{arcctg}x$ есть исходная обычная обратная тригонометрическая функция арккотангенс. Последняя монотонно убывает на интервале $-\infty<x<\infty$ и проходит последовательно все возможные значения от π до 0. Это позволяет записать интервальную обратную тригонометрическую функцию арккотангенс (72) в виде

(73) $\tilde{y}\equiv[y_1,y_2]=\operatorname{arcctg}\tilde{x}=\operatorname{arcctg}[x_1,x_2]=[\operatorname{arcctg}x_2,\operatorname{arcctg}x_1]$.

Сравнив (73) с (1), видим, что интервальная обратная тригонометрическая функция арккотангенс является интервальной функцией, нижняя и верхняя граничные функции которой имеют вид

(74) $y_1=f_1(\tilde{x})=f_1(x_1,x_2)=\operatorname{arcctg}x_2,\quad y_2=f_2(\tilde{x})=f_2(x_1,x_2)=\operatorname{arcctg}x_1$.

Подставив (74) в (11) и (12), получим выражение производной любого n-го порядка от интервальной обратной тригонометрической функции $\tilde{y}=\operatorname{arcctg}\tilde{x}$ в виде

(75) $\tilde{y}^{(n)}=(\operatorname{arcctg}\tilde{x})^{(n)}=(\operatorname{arcctg}[x_1,x_2])^{(n)}=[-f^{(n)}(\tilde{x}),f^{(n)}(\tilde{x})]$,

где

$$f^{(n)}(\tilde{x})=2^{n-1}(\operatorname{arcctg}x_1-\operatorname{arcctg}x_2)/(x_2-x_1)^n.$$

Формула (75) показывает, что в интервальной производной любого n-го порядка $(\operatorname{arcctg}\tilde{x})^{(n)}$ от интервальной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arcctg}\tilde{x}$ исходная обратная тригонометрическая функция арккотангенс остаётся арккотангенсом, в отличие от производной от обычной обратной тригонометрической функции $\operatorname{arcctg}x$, которая равна $-1/(1+x^2)$. Интервальная производная $(\operatorname{arcctg}\tilde{x})^{(n)}$ существует во всех точках $\tilde{x}=[x_1,x_2]$, в которых $x_1\neq x_2$. Она монотонно убывает с увеличением разности x_2-x_1.

4 Обсуждение

Проблема вычисления производных от интервально-определённых функций существенно отличается от аналогичной проблемы для полностью определённых функций. Это отличие связано с известным отличием процесса вычисления полностью определённой функции от процесса вычисления интервальной функции – во втором случае приходится вычислять параллельно две независимые точно заданные функции – нижнюю и верхнюю граничные функции интервальной функции. В связи с этим отличием вычисление неполностью определённой – интервальной функции оказывается более сложным [8–13]. Эта сложность вычисления распространяется и на производные от интервальных функций, поскольку они также являются интервальными функциями. Поэтому предпринятое в статье детальное изучение производных элементарных функций, сопровождаемое получением простых формул для вычисления этих производных, является важным шагом на пути уменьшения сложности вычисления интервальных функций.

В процессе изучения выявлены различия между интервальными производными от интервальных элементарных функций и классическими производными от детерминированных элементарных функций. Главное различие состоит в том, что производная любого n-го

$(n=1,2,...)$ порядка от любой интервальной функции $\widetilde{P}(\widetilde{x})$, в частности, элементарной функции, всегда представляет собой функцию класса $\widetilde{P}(\widetilde{x})/\widetilde{x}^n$. Поэтому интервальную производную любого n-го порядка с полным правом можно интерпретировать как скорость n-го порядка изменения функции $P(\widetilde{x})$ относительно её аргумента $\widetilde{x}$. Известно, что классическая производная любого порядка n от любой детерминированной функции $P(x)$ не обязательно представляет собой функцию класса $P(x)/x^n$. Поэтому такую производную в общем случае нельзя интерпретировать как скорость n-го порядка изменения функции $P(x)$ относительно её аргумента. Это означает, в свою очередь, что классическая производная Ньютона–Лейбница, в отличие от интервальной производной, вообще говоря, не может считаться адекватной моделью динамики большинства природных объектов и процессов.

Заключение

В работе получен полный набор производных любых порядков от всех элементарных интервальных функций. Выявлены различия между интервальными производными от интервальных элементарных функций и классическими производными от обычных детерминированных элементарных функций. Показано, что учёт неопределённости исходных функций в форме интервальности их возможных значений делает производные от них адекватными моделями динамики природных процессов.

Список источников

[1] ***Гнеденко, Б.В.*** Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко // – М.: Наука, 2004. – 350 с.

[2] ***Заде, Л.А.*** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде // – М.: Мир, 1976. – 160 с.

[3] ***Алефельд, Г.*** Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер // – М.: Мир, 1987. – 356 с.

[4] ***Левин, В.И.*** Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления / В.И. Левин // Онтология проектирования. – 2013. – № 4. – С. 72–84.

[5] ***Левин, В.И.*** Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения / В.И. Левин // Информационные технологии. – 2014. – № 7. – С. 3–10.

[6] ***Фихтенгольц, Г.М.*** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц // – М.: Физматлит, 2001. – 616 с.

[7] ***Левин, В.И.*** Дифференциальное исчисление для интервально-определенных функций / В.И. Левин // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. – 2015. Т. 2. – № 2. – С. 8–25.

[8] ***Вощинин, А.П.*** Оптимизация в условиях неопределённости / А.П. Вощинин, Г.Р. Сотиров //. – М: Изд-во МЭИ, 1989. – 224 с.

[9] ***Ащепков, Л.Т.*** Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л.Т. Ащепков, Д.В. Давыдов // – М.: Наука, 2006. – 285 с.

[10] ***Moore R.E.*** Interval Analysis. – N.Y.: Prentice-Hall, 1966. – 230 p.

[11] ***Libura M.*** Integer Programming Problems with Inexact Objective Function // Control and Cybernetics. – 1980. Vol. 9. – № 4. – P. 189–202.

[12] ***Куржанский, А.Б.*** Задача идентификации – теория гарантированных оценок / А.Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 447–465.

[13] ***Hyvonen E.*** Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach // Artificial Intelligence. – 1992. Vol. 58. – P. 19.

DIFFERENTIAL CALCULUS OF INTERVAL ELEMENTARY FUNCTIONS AND DECISION-MAKING

V.I. Levin

Penza State Technological University, Penza, Russia
vilevin@mail.ru

Abstract

The article deals with problems, related to calculation of derivatives of interval-specified functions. These problems are relevant in study of systems with any level of uncertainty (nondeterministic systems). Specifically we speak about simple systems described by elementary interval-specific functions. Accordingly we solved the problem of calculating derivatives of elementary interval-specified functions. Previously obtained formulas and methods of finding of derivatives of any intervally defined functions are used. Basic definitions, related to derivatives of the interval-specified functions, are given and formulas of two types allowing calculation of interval derivatives are presented. Formulas of the first type express derivatives in the closed interval form, which requires computation using the apparatus of interval mathematics. But formulas of the second type express derivatives in open interval form, i.e. in form of two formulas. Formulas above expresses the lower and the upper limits of the interval representing the derivative. Here the calculation of the derivative of interval-defined function is reduced to computation of two ordinary certain functions. Using the aforementioned mathematical apparatus we find the derivatives of all elementary interval functions: interval constant, interval power function, interval exponential function, interval logarithmic function, interval natural-logarithmic function, interval trigonometric functions (cosine, sine, tangent, cotangent), interval inverse trigonometric functions. Formulas of all the derivatives are shown in form of an open interval. The difference between derivatives of interval elementary functions and the derivatives of normal (i.e. noninterval) elementary functions is discussed.

Keywords: *interval value, interval function, interval derivative, interval computations, interval-differential calculus, interval elementary functions.*

Citation: *Levin VI,* Differential calculus of interval elementary functions and decision-making [In Russian]. *Ontology of designing*. 2016; 6(21): 340-354. DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-3-340-354.

References

[1] *Gnedenko BV.* Kurs Teorii Veroyatnostey [In Russian]. – Moscow: Nauka, 2004. – 350 p.
[2] *Zadeh LA.* The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning // Information Sciences. – 1975. – № 8; 9. – P. 199–249, 301–357; 43–80.
[3] *Alefeld G, Herzberger J.* Introduction to Interval Computation. – N.Y.: Academic Press, 1983 – 352 p.
[4] *Levin VI.* The interval derivative and the basis of nondeterministic differential calculus [In Russian]. Ontology of designing. 2013; № 4 (10): 72–84.
[5] *Levin VI.* Interval-differential calculus and some of its applications [In Russian]. Informacionnye Tehnologii. 2014; № 7: 3–10.
[6] *Fihtengolz GM.* Differential and integral calculus [In Russian]. V. 1. – M.: Fizmatlit, 2001. – 616 p.
[7] *Levin VI.* Differential calculus for interval-specific functions [In Russian]. Heuristic algorithms and distributed computing. 2015; 2(2): 8–25.
[8] *Voschinin AP, Sotirov GR.* Optimization under conditions of uncertainty [In Russian]. – M: MEI Publishers, 1989. – 224 p.
[9] *Aschepkov LT, Davydov DV.* Universal solution of interval governance and optimization problems [In Russian]. – M.: Nauka, 2006. – 285 p.
[10] *Moore RE.* Interval Analysis. – N.Y.: Prentice-Hall, 1966. – 230 p.
[11] *Libura M.* Integer Programming Problems with Inexact Objective Function. Control and Cybernetics. – 1980. Vol. 9. – № 4. – P. 189–202.
[12] *Kurzhanskiy AB.* Identification Problem – Theory of Guaranteed Estimates [In Russian]. Automation and Remote Control. – 1991. Vol. 52. – № 4. – P. 447–465.
[13] *Hyvonen E.* Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach // Artificial Intelligence. – 1992. Vol. 58. – P. 19.

Сведения об авторе

Левин Виталий Ильич окончил Каунасский политехнический ин-т, Открытый ун-т Израиля. Доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor, заведующий кафедрой математики (1975–2000), советник рек-тора по науке (2006–2011) Пензенского гососударственного технологического университетата, профессор Московского университета им. С.Ю. Витте (с 2003 г.). В списке научных трудов сотни работ (в том числе десятки монографий) по логике; математическому моделированию в технике, экономике, социологии, принятию решений; оптимизации; теории надежности; истории науки; проблемам образования. Действительный член МАИ, ЕАИ, МАНЭБ и АСН, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат международных премий «Соросовский профессор», Международный эксперт в области социологии конфликта и рейтингования униерситетов.

Vitaly I. Levin graduated from Kaunas Politechnical Institute, Open University of Israel, Doctor of Engineering Science, Professor, PhD, Full Professor. Head of Mathematics Department (1975–2000), the scientific counselor of rector (2006–2011) of Penza State Technological University, professor of Moscow University named after S.J. Vitte (since 2003). He is the autor of hundreds of publications (among them dozens of monographs), in logic; mathematical modelling of engineering, economics, sociology; optimization; reliability; history of science; education problems. The member of IIA, EIA, IAELP, ASS. Honoured scientist of Russia, Laureate of International Prizes “Soros Professor”, International Reviewer in Sociology of conflicts and Universiry ranking.