УДК 519.5

КАК «НУМЕРИЗОВАТЬ» ПОНЯТИЕ «ВАЖНЕЕ»

С.А. Пиявский

Архитектурно-строительный институт
Самарского государственного технического университета, Самара, Россия
spiyav@mail.ru

Аннотация

Проблема многокритериального выбора является ключевым элементом принятия сложных решений и уже более полувека не теряет актуальности. Предложен целый ряд подходов и методов, позволяющих предполагать, что принимаемые с их использованием решения наиболее рациональны. Основным элементом большинства из этих методов является линейная свёртка частных критериев, а различие заключается в тех или иных эвристических или экспертных способах задания числовых значений коэффициентов важности критериев. В этих условиях представляется полезным поиск универсальных средств многокритериального сравнения альтернатив, основанных на небольшом числе естественных аксиом, математически строго обоснованных и, в то же время, простых при практическом использовании. В статье предлагается подход, состоящий в том, чтобы перейти от непрерывного пространства коэффициентов важности частных критериев к более естественному для лица, принимающего решение, дискретному пространству политик выбора. Использование такого пространства позволило достаточно просто классифицировать задачи принятия решения и сформировать универсальную таблицу коэффициентов сравнительной важности частных критериев пригодную для любых задач многокритериальной оптимизации альтернатив. Кроме этого, анализ понятия «важности» в пространстве политик выбора позволил рассмотреть некоторые новые аспекты сравнительной оценки многокритериальных альтернатив. В частности, показана некорректность осреднения нормированных значений критериев, признаваемых эквивалентными по важности; выявлен так называемый «краевой эффект», состоящий в постоянстве цепочек коэффициентов сравнительной важности критериев, отвечающих одинаковым крайним фрагментам политики выбора. Проведено сравнение предложенного подхода с широко известным методом анализа иерархий Т. Саати и разработана модификация, повышающая обоснованность и простоту использования этого метода.

Ключевые слова: *принятие решений, многокритериальный выбор, универсальные коэффициенты важности, метод анализа иерархий, аналитическое планирование.*

Цитирование: *Пиявский, С.А.* Как «нумеризовать» понятие «важнее» / С.А. Пиявский // Онтология проектирования. – 2016. – Т. 6, №4(22). - С. 414-435. – DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-4-414-435.

Введение

В физическом мире пространства-времени для сравнительного анализа материальных объектов ключевыми являются понятия «дальше» и «быстрее». Для их количественного измерения - так сказать, «*нумеризации*» - человечество создаёт специальные инструменты, в простом случае школьную линейку и секундомер. В социуме столь же значимую роль играет понятие «важнее» и оно также подлежит количественному измерению. Оно органически связано с непрерывно осуществляемым каждым человеком процессом выбора наилучшего решения из набора возможных вариантов (альтернатив). С середины прошлого века вопросы *научной поддержки* этого процесса становятся всё более актуальными (например, [1-8]).

Дело в том, что при разумном выборе, осмысливая решение всесторонне, человек, в конечном счёте, выделяет ряд различных его *аспектов* (дезагрегирует проблему) так, чтобы по каждому из них альтернативы могли быть упорядочены в сторону, например, их ухудшения. В науке, технике, экономике в большинстве случаев эффективность альтернатив по каждому аспекту может быть оценена по *количественной* или порядковой шкале, то есть является соответствующим частным критерием. Шкалы частных критериев приводят к единой шкале (это называется *нормализацией*), после чего наступает заключительный этап принятия решения – формирование алгоритма, позволяющего для каждой альтернативы по значениям её частных критериев рассчитать значение некоторого *комплексного критерия*, определяющего эффективность альтернативы в целом.

Если при этом лицо, принимающее решение (ЛПР), может исходить из одинаковой важности всех учитываемых аспектов, чаще всего алгоритм оказывается простым: исходя из соображений простоты понимания и симметрии ситуации, достаточно сложить значения частных критериев или рассчитать их среднее арифметическое (принцип Лапласа).

Гипотеза 1 о линейной свёртке частных критериев. Если одни аспекты представляются для ЛПР более «важными», чем другие, то традиционно в этом случае предлагается принять в качестве комплексного критерия *средневзвешенное значение* частных критериев – т.н. линейную свёртку:

(1) $$F(f)=\sum_{j=1}^{m}x^j f^j,\ j=1,...,m,\ x^j\geq 0,\ \sum_{j=1}^{m}x^j=1,$$

где $f=(f^1,f^2,...,f^m)$ - вектор значений m частных критериев f^j, $j=1,...,m$,а $x^1,x^2,...,x^m$ - вектор количественных весовых коэффициентов, отражающих *сравнительную важность* для ЛПР различных аспектов сравнения решений. Здесь и возникает вопрос – как задать количественные значения весовых коэффициентов? Общепризнано, что простейшее решение – пусть эти значения укажет ЛПР, сообразуясь со своим внутренним ощущением, - нереализуемо. Жених не в состоянии достаточно уверенно определить, что, например, красота невесты в 2,354 раза важнее для него, чем её ум. Он может достаточно уверенно решить про себя, что красота «*важнее*» или «*намного важнее*», но не более того. Отсюда возникает вопрос – возможно ли создать достаточно понятную и широко признаваемую *универсальную шкалу*, которая определила бы численные значения весовых коэффициентов, отвечающие различным *степеням* понятия «важнее»?

Одной из первых и наиболее успешных попыток в этом направлении можно считать предложенный Т. Саати *метод анализа иерархий*, также называемый «аналитическое планирование» (*Analytic Hierarchy Process*, AHP) [9]. В его основе лежит шкала, приведённая в таблице 1 [9-11].

Применительно к обсуждаемой проблеме эта универсальная шкала позволяет весьма просто рассчитать значения коэффициентов важности частных критериев в конкретной задаче принятия решений, если в ней ЛПР попарно сравнил между собой частные критерии и сопоставил каждой паре соответствующие значения из таблицы 1. Алгоритм расчёта достаточно естественен и основан на том соображении, что если коэффициент важности критерия *A* в *k* раз больше коэффициента важности критерия *B*, то рассчитанный по этому же алгоритму коэффициент важности критерия *B* должен ровно в 1/*k* раз быть больше коэффициента важности критерия *A*.

Такой подход имеет два недостатка: не очень убедительное обоснование «*волшебных чисел*» 1, 3, 5, 7, 9 и большое число *парных сравнений* критериев ЛПР-ом (например, при 15 критериях 105 сравнений), что не только утомительно, но и неизбежно приводит к трудно устраняемой *несогласованности* оценок. Оба сделанных замечания будут более подробно рассмотрены далее.

Таблица 1 –Шкала относительной важности в методе анализа иерархий Т. Саати по [11]

Определение сравнительной важности двух сравниваемых объектов	Коэффициент важности (в оригинале – *интенсивность относительной важности*)	Объяснения (в формулировке оригинала)
Равная важность	1	Равный вклад двух видов деятельности в цель
Умеренное превосходство одного над другим	3	Опыт и суждения дают лёгкое превосходство одному виду деятельности над другим
Существенное или сильное превосходство	5	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
Значительное превосходство	7	Одному виду деятельности даётся настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
Очень сильное превосходство	9	Очевидное превосходство одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	2, 4 ,6, 8	Применяются в компромиссном случае

В 70-х годах прошлого века был предложен универсальный подход к объективному количественному учёту сравнительной важности критериев [5, 6], получивший название *метода* ПРИНН (Принятие Решений прИ Неустранимой Неопределённости), а впоследствии, при его развитии, *метода уверенных суждений* ЛПР [12, 13]. Его суть заключается в том, чтобы признать, что коэффициенты важности критериев являются неопределёнными и оценивать эффективность альтернатив с непосредственным учётом всего множества неопределённости этих критериев. Для облегчения расчётов это множество заменяется универсальным типовым набором так называемых порождающих функций.

Особенно просто выглядит метод ПРИНН применительно к определению коэффициентов важности критериев в линейной свёртке (1). Метод позволяет получить наглядные и простые в использовании универсальные для любых задач принятия решений коэффициенты важности частных критериев, а также глубже проникнуть в саму суть понятия «важнее». Однако лежащий в основе метода достаточно сложный математический аппарат описания порождающих функций делает его непонятным для большинства ЛПР. В настоящей же статье идеи метода ПРИНН применяются изначально к условиям действия гипотезы 1, что позволяет отказаться от введения порождающих функций, заменив их множество множеством допустимых значений неопределенных коэффициентов важности критериев в линейной свертке. В результате метод становится понятным для широкого круга ЛПР, что будет способствовать его применению.

1 Формирование таблицы возможных вариантов распределения критериев по группам важности

Гипотеза 2 о группах важности критериев. Единственная возможность для ЛПР указать своё отношение к сравнительной важности различных частных критериев состоит в том, чтобы отнести каждый из них к одной из нескольких групп важности, которые можно обозначить как В1, В2 и т.д. по мере возрастания важности. При этом в конкретной задаче принятия решений нумерация используемых групп должна идти слитно, без пробелов и каждая из используемых групп должна содержать хотя бы один критерий. Это подчеркивает, что, в отличие от подхода АНР, группы важности носят не абсолютный, а относительный характер, т.е. применимы только к той задаче принятия решений, в которой рассматриваются.

Тогда появляется возможность для каждого количества частных критериев указать все варианты распределения этих критериев по группам важности (см., например, таблицы 2-4). В таблице 2 затемнённая строка, например, показывает, что в конкретной задаче принятия решения имеются три частных критерия, причём два из них относятся к первой группе важности, а третий критерий – ко второй группе важности, т.е. он более важен, чем каждый из двух остальных.

В таблицах вариантов распределения критериев по группам важности, очевидно, выполняются следующие условия:

1) в строке не может быть числа 0, т.к. не может быть пустой группы значимости (тогда её нужно просто пропустить);
2) сумма чисел в строке равна числу критериев n;
3) в каждом столбце j должны встретиться (возможно, не по одному разу) все числа от 1 до $n - j + 1$ (следует из условий 1 и 2).

Таблица 2 – Варианты распределения двух, трёх и четырёх критериев по группам важности

Число частных критериев в задаче принятия решений	Количествокритериев в каждой группе важности				
	В1	В2	В3	В4	В5
2	2				
	1	1			
3	3				
	2	1			
	1	2			
	1	1	1		
4	4				
	3	1			
	2	2			
	1	3			
	2	1	1		
	1	2	1		
	1	1	2		
	1	1	1	1	

Таблица 3 – Варианты распределения пяти критериев по группам важности

Число частных критериев в задаче принятия решений	Количество критериев в каждой группе важности					
	В1	В2	В3	В4	В5	В6
5	1	1	1	1	1	
	1	1	1	2		
	1	1	2	1		
	1	1	3			
	1	2	1	1		
	1	2	2			
	1	3	1			
	1	4				
	2	1	1	1		
	2	1	2			
	2	2	1			
	2	3				
	3	1	1			
	3	2				
	4	1				
	5					

Таблицы можно достраивать методом индукции, последовательно переходя от n к $n + 1$. Для этого каждую строку предшествующей таблицы модифицируем в новые строки, поочередно прибавляя к каждому ненулевому элементу строки единицу. А затем дописываем строки предыдущей таблицы, добавляя единицу после последней заполненной клетки. В получившейся новой таблице оставляем лишь уникальные строки

Таблица 4 – Варианты распределения шести критериев по группам важности

Число частных критериев в задаче принятия решений	Количество критериев в каждой группе важности					
	В1	В2	В3	В4	В5	В6
6	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	2	
	1	1	1	2	1	
	1	1	1	3		
	1	1	2	1	1	
	1	1	2	2		
	1	1	3	1		
	1	1	4			
	1	2	1	1	1	
	1	2	1	2		
	1	2	2	1		
	1	2	3			
	1	3	1	1		
	1	3	2			
	1	4	1			
	1	5				
	2	1	1	1	1	
	2	1	1	2		
	2	1	2	1		
	2	1	3			
	2	2	1	1		
	2	2	2			
	2	3	1			
	2	4				
	3	1	1	1		
	3	1	2			
	3	2	1			
	3	3				
	4	1	1			
	4	2				
	5	1				
	6					

2 Таблица универсальных коэффициентов важности для линейной свёртки критериев

Гипотеза 3 о непосредственном учёте неопределённости коэффициентов важности частных критериев. В основу комплексной оценки многокритериальных альтернатив следует положить всё множество значений коэффициентов важности частных критериев, удовлетворяющих высказанным ЛПР-ом предпочтениям (что составляет суть метода ПРИНН). В условиях сформулированных гипотез 1 и 2 это позволяет рассчитать универсальные значения коэффициентов важности частных критериев, применимые при решении любых конкретных задач многокритериального выбора. Такие таблицы для небольшого числа критериев рассчитаны в настоящей статье, а численно могут быть заранее рассчитаны для любого практически полезного количества критериев.

Поясним их использование на примере «Выбор площадки для строительства аэропорта» из [7]. Исходные данные примера приведены в левой части таблицы 5. В правой части показаны нормированные значения частных критериев в пределах от 0 до 1. В последнем столбце таблицы 5 приведены результаты расчёта комплексного критерия при гуманной политике выбора ЛПР, полагающего, что наиболее важным критерием является «Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям», менее важным – «Время поездки от центра города» и ещё менее важным – «Стоимость строительства аэропорта». Такой политике выбора отвечают универсальные коэффициенты важности, показанные в строке 1, 1, 1 таблицы 7: (0,111; 0,278; 0,611). С их использованием значение комплексного критерия, рассчитанное для площадки ***A*,** равно 0,111*1+0,278*1+0,611*0 = 0,389. Рассчитанные аналогичным образом значения для других альтернатив приведены в последнем столбце таблицы 5. Как видно из неё, наилучшим выбором является площадка ***B***.

Таблица 5 – Выбор площадки для строительства аэропорта

Варианты решений	Частные критерии (на минимум)			Нормированные частные критерии			Комплексный критерий (на минимум)
	Стоимость строительства аэропорта (млн.ед.)	Время поездки от центра города (мин)	Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям (тыс. чел.).	Стоимость строительства аэропорта (норм)	Время поездки от центра города (норм)	Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям (норм)	
Группы важности	B1	B2	B3	B1	B2	B3	
Коэффициенты важности				0,111	0,278	0,611	
Площадка ***A***	180	70	10	1,000	1,000	0,000	0,389
Площадка ***B***	170	40	15	0,667	0,000	0,333	0,276
Площадка ***C***	160	55	20	0,333	0,500	0,667	0,583
Площадка ***D***	150	50	25	0,000	0,333	1,000	4
минимум	150	40	10				
максимум	180	70	25				

3 Определение универсальных коэффициентов важности для линейной свёртки критериев методом ПРИНН

Рассмотрим теперь, как определяются на основе гипотез 1-3 коэффициенты важности частных критериев в линейной свертке. Как указано выше, при известных коэффициентах важности комплексный критерий линейной свертки имеет вид (1). Гипотеза 3 предлагает рассматривать его с учётом того, что коэффициенты важности не известны однозначно, а лишь принадлежат некоторому множеству неопределённости коэффициентов X элементов m-мерного пространства, удовлетворяющих высказанным ЛПР-ом предпочтениям. Это множество описывается соотношениями из (1)

$$(2) \qquad j = 1,...,m,\ x^j \ge 0,\ \ j = 1,...,m,\ \sum_{j=1}^{m} x^j = 1,$$

к которым добавляются модели, описывающие отнесение ЛПР-ом различных критериев к различным группам важности.

Значение нового комплексного критерия $\overline{F}$ определяется при этом как среднее из значений функции (1) по всему множеству X, т.е.

(3)
$$\overline{F} = \frac{\int\limits_{x \in X} F(f)dx}{\int\limits_{x \in X} dx}.$$

Проведём преобразования:
$$\overline{F} = \frac{\int\limits_{x \in X} F(f)dx}{\int\limits_{x \in X} dx} = \frac{\int\limits_{x \in X} \sum\limits_{j=1}^{m} x^j f^j dx}{\int\limits_{x \in X} dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\int\limits_{x \in X} x^j dx}{\int\limits_{x \in X} dx} f^j \equiv \sum_{j=1}^{m} x_{cm}^j f^j,$$

где

(4)
$$x_{cm}^j = \frac{\int\limits_{x \in X} \sum\limits_{j=1}^{m} x^j dx}{\int\limits_{x \in X} dx}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, получен важный и красивый результат. Оказалось, что коэффициенты важности частных критериев в линейной свёртке не зависят от сравниваемых альтернатив и геометрически представляют собой координаты центра масс фигуры (это подчеркивает индекс *cm*), описываемой множеством неопределённости коэффициентов *X*. Это позволяет получить значения коэффициентов важности критериев, непосредственно рассматривая множества неопределённости критериев для каждой строки таблиц 2-4.

Вычисление коэффициентов (4) легко вести методом статистических испытаний или прямым перебором с малым шагом, непосредственно вычисляя многомерные интегралы. Однако для небольшого числа частных критериев можно аналитически получить точные значения коэффициентов важности, непосредственно анализируя графический образ их множества неопределённости.

4 Аналитический расчёт универсальных коэффициентов важности для двух, трёх и четырёх критериев

Для двух критериев, как следует из таблицы 2, возможны лишь две различные политики сравнительной оценки важности частных критериев:

- <2; 2> - оба критерия равно важны;
- <2; 1, 1> - один критерий важнее другого.

Для политики <2; 2> из условий симметрии $x^1 = x^2 = 0{,}5$.

Для политики <2; 1, 1> легко определить координаты центра масс множества неопределённости коэффициентов важности. Оно задаётся соотношениями

$$x^1 \geq 0,\; x^2 \geq 0,\; x^1 + x^2 = 1,\; x^1 \geq x^2$$

и представляет собой линию *AB* на двумерной плоскости (x^1, x^2) (см. рисунок 1). Центр масс этой линии, находящийся в её середине, имеет координаты

$$x^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad x^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Для трёх критериев возможны четыре различные политики сравнительной оценки важности критериев:

- <3; 3> - все критерии равно важны;
- <3; 1, 2> - каждый из двух критериев важнее третьего;
- <3; 2, 1> - один критерий важнее каждого из двух других;

- <3; 1, 1, 1> - один критерий важнее другого, а этот другой важнее третьего.
  Для политики <3; 3>, исходя из условий симметрии, очевидно

$$x^1 = x^2 = x^3 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333\,.$$

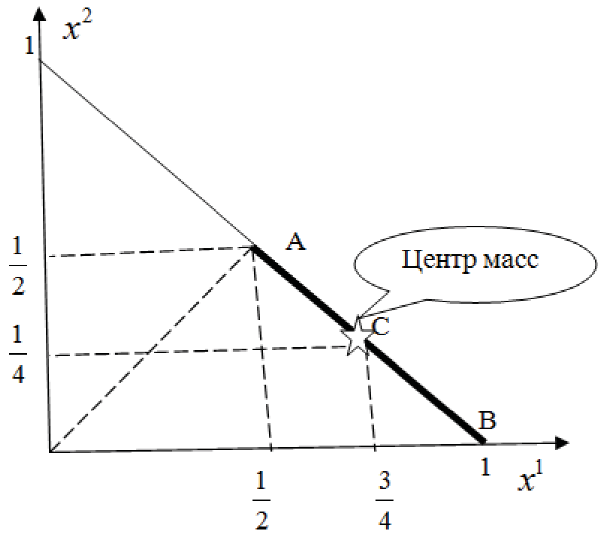

Рисунок 1 - Множество неопределённости весовых коэффициентов двух критериев

Для каждой другой политики необходимо построить в трёхмерном пространстве коэффициентов важности критериев множество неопределённости коэффициентов важности критериев. Каждое из таких множеств является подмножеством множества, заданного соотношениями

(5) $$x^1 \geq 0,\; x^2 \geq 0, x^3 \geq 0,\; x^1 + x^2 + x^3 = 1\,.$$

Это множество представлено треугольником *ABC*, показанным на рисунке 2.

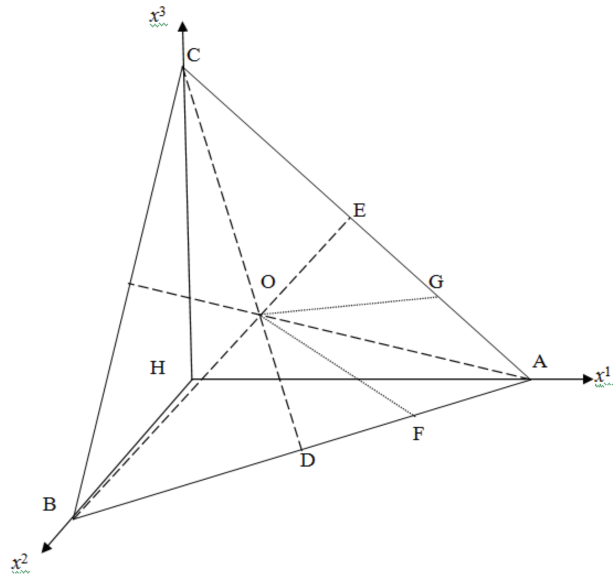

Рисунок 2 – К построению множеств неопределённости весовых коэффициентов трёх критериев при различных политиках сравнительной важности критериев

На рисунке 2 точки *A*(1,0,0), *B*(0,1,0), *C*(0,0,1) являются вершинами равностороннего треугольника. Точка *O*(1/3, 1/3, 1/3) есть точка пересечения медиан этого треугольника. Точки *D*(½, ½, 0), *E*(½, 0, ½), *F*(3/4, ¼, 0), *G*(3/4, 0, ¼) делят пополам соответственно отрезки [*A*, *B*], [*A*, *C*], [*A*, *D*], [*A*, *E*].

Для политики <3; 1, 2> к условию (5) добавляются условия $x^1 \ge x^2$, $x^3 \ge x^2$,
которые вырезают из треугольника ABC треугольник AOC, являющийся множеством неопределенности коэффициентов сравнительной важности критериев для этой политики (рисунок 3). Его центр масс лежит на медиане OE на расстоянии двух третей её длины от точки O [1]. Уравнение этой медианы имеет вид [2]

$$\frac{x^1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{x^2-\frac{1}{3}}{0-\frac{1}{3}}=\frac{x^3-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=t,$$

где $0 \le t \le 1$ - параметр.

Отсюда $x^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}t,\ x^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t,\ x^3=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}t$,

и при $t=\frac{2}{3}$ окончательно $x^1=\frac{4}{9}\approx 0{,}444,\ x^2=\frac{1}{9}\approx 0.111,\ x^3=\frac{4}{9}\approx 0{,}444$.

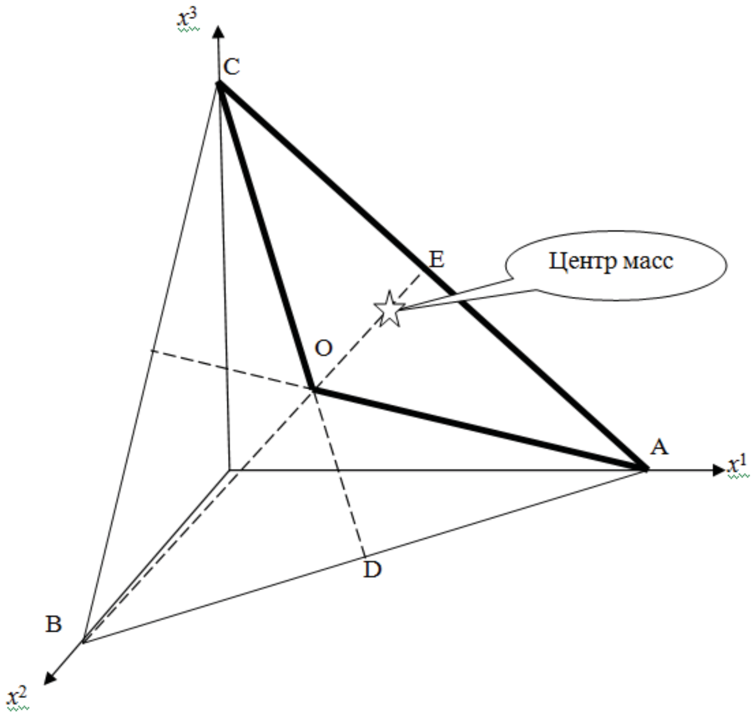

Рисунок 3 – К построению множества неопределённости весовых коэффициентов трёх критериев при политике сравнительной важности критериев <3; 1, 2>

Для политики <3; 2, 1>, аналогично предыдущему, к условию (5) добавляются условия

$$x^1 \ge x^2,\ x^1 \ge x^3,$$

которые вырезают из треугольника ABC четырехугольник $ADOE$, являющийся множеством неопределенности коэффициентов сравнительной важности критериев для этой политики (рисунок 4).

Четырехугольник $ADOE$ состоит из двух треугольников ADO и AOE. Центр масс каждого из них лежит соответственно на медианах OF и OG на расстоянии двух третей их длины от точки O.

Уравнение медианы OF имеет вид $\dfrac{x^1-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=\dfrac{x^2-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=\dfrac{x^3-\frac{1}{3}}{0-\frac{1}{3}}=r$, где $0\le r\le 1$ - параметр.

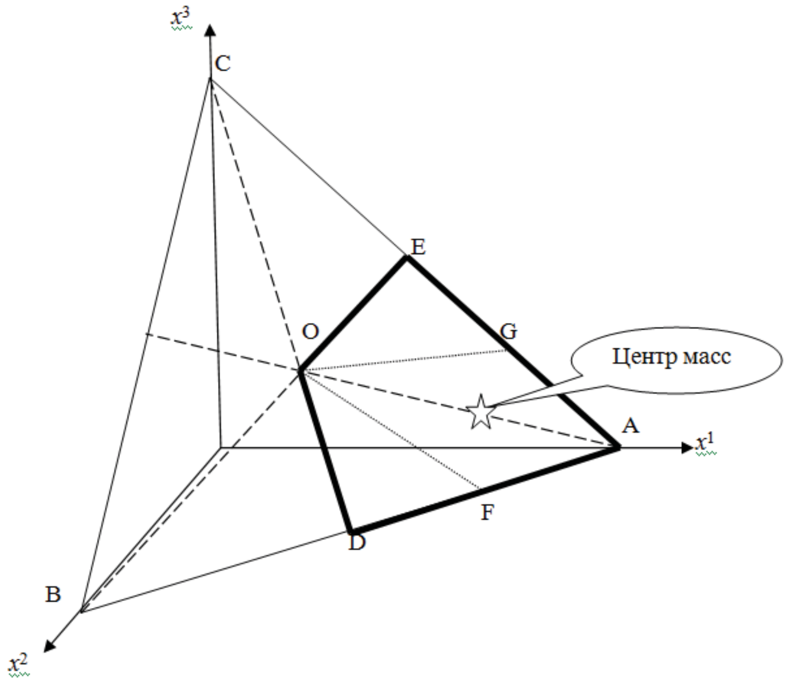

Рисунок 4 – К построению множества неопределённости весовых коэффициентов трех критериев при политике сравнительной важности критериев <3; 2, 1>

Отсюда $x^1=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}r,\ x^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}r,\ x^3=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r$,

и при $r=\frac{2}{3}$ окончательно $x^1=\frac{11}{18},\ x^2=\frac{5}{18},\ x^3=\frac{2}{18}$.

Для медианы OG имеем: $\dfrac{x^1-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=\dfrac{x^2-\frac{1}{3}}{0-\frac{1}{3}}=\dfrac{x^3-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=q$,

где $0\le q\le 1$ - параметр. Тогда $x^1=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}q,\ x^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}q,\ x^3=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}q$,

и при $q=\frac{2}{3}$ получаем $x^1=\frac{11}{18},\ x^2=\frac{2}{18},\ x^3=\frac{5}{18}$.

Поскольку треугольники ADO и AOE конгруэнтны, т.е. совпадают при вращении вокруг оси AO, их площади равны и потому координаты центра масс четырехугольника $ADOE$ равны среднему арифметическому координат центр масс составляющих его треугольников. Поэтому для координат центра масс множества неопределенности коэффициентов сравнительной важности критериев при рассматриваемой политике получим

$$x^1 = \frac{11}{18} \approx 0{,}611,\ \ x^2 = \frac{7}{36} \approx 0{,}194,\ \ x^3 = \frac{7}{36} \approx 0{,}194\,.$$

Для политики <3; 1, 1, 1> к условию (5) добавляются условия $x^1 \geq x^2$, $x^2 \geq x3$, которые вырезают из треугольника ABC треугольник AOD, являющийся множеством неопределенности коэффициентов сравнительной важности критериев для этой политики (рисунок 5).

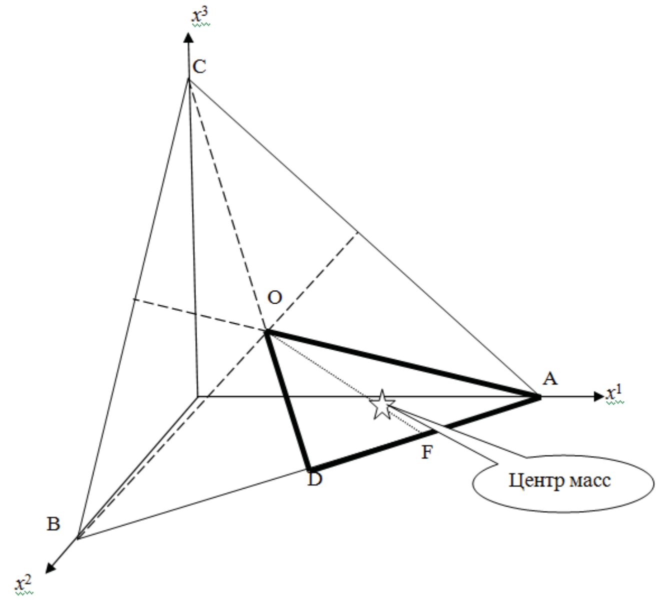

Рисунок 5 – К построению множества неопределённости весовых коэффициентов трех критериев при политике сравнительной важности критериев<3; 1, 1, 1>

Его центр масс лежит на медиане OF на расстоянии двух третей ее длины от точки O. Уравнение этой медианы имеет вид

$$\frac{x^1 - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{x^3 - \frac{1}{3}}{0 - \frac{1}{3}} = k\,,$$

где $0 \leq k \leq 1$ - параметр.

Отсюда

$$x^1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{12}k,\ \ x^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}k,\ \ x^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}k\ ,$$

и при $k = \frac{2}{3}$ получаем $x^1 = \frac{11}{18} \approx 0{,}611,\ \ x^2 = \frac{5}{18} \approx 0{,}278,\ \ x^3 = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$.

Для четырех критериев возможны восемь различных политик сравнительной оценки важности критериев:

- <4; 4> - все критерии равно важны;
- <4; 3, 1> - один критерий важнее каждого из остальных;
- <4; 2, 2> - два критерия эквивалентны друг другу по важности и каждый из них важнее каждого из двух прочих;
- <4; 1, 3> - три критерия эквивалентны друг другу по важности и каждый из них важнее оставшегося;
- <4; 2, 1, 1> - один критерий важнее другого и каждый из них важнее каждого из двух прочих;

- <4; 1, 2, 1> - один критерий важнее каждого из двух других и каждый из них важнее оставшегося;
- <4; 1, 1, 2> - два критерия эквивалентны друг другу по важности и каждый из них важнее каждого двух прочих, а из этих прочих критериев один важнее другого;
- <4; 1, 1, 1, 1> - один критерий важнее другого, другой важнее третьего, а третий важнее четвертого.

Геометрические образы множества неопределенности коэффициентов важности критериев для этих политик являются фигурами четырехмерного пространства, поэтому наглядно представить положение их центров масс невозможно. Поэтому уменьшим на единицу размерность пространства, временно исключив из рассмотрения коэффициент x^4. Используем для этого уравнение $\sum_{j=1}^{m} x^j = 1$ из (1). Тогда множество неопределенности критериев x^1, x^2, x^3 будет описываться системой условий

(6) $$x^j \geq 0,\ \ j = 1,2,3,\ \ x^1 + x^2 + x^3 \leq 1,$$

к которой при различных политиках выбора будут добавляться соответствующие условия. Описываемая условиями (6) фигура представляет собой тетраэдр $ABCH$, показанный на рисунке 2. Дополнительные условия, накладываемые различными политиками, будут вырезать из него соответствующие фигуры.

Ввиду большого числа вариантов политик сравнительной оценки важности критериев, в разных случаях используем различные подходы к вычислению коэффициентов важности.

Начнем с последней политики.

Для политики <4; 1, 1, 1, 1> к условию (6) добавляются условия

$$x^1 \geq x^2,\ x^2 \geq x^3,\ x^3 \geq 1 - x^1 - x^2 - x^3.$$

Полученное множество неопределённостей показано на рисунке 6. Условие $x1 \geq x2$ вырезает из тетраэдра $ABCH$ тетраэдр $ACDH$, а условие $x^2 \geq x^3$ - тетраэдр $ABPH$. Их общей частью является тетраэдр $AODH$. Условие $x^3 \geq 1 - x^1 - x^2 - x^3$ преобразуем в вид $x^3 \geq \frac{1 - x^1 - x^2}{2}$. Оно определяет верхнюю полуплоскость плоскости, проходящей через точки *A, B* и точку *R*, делящую отрезок *HC* пополам.

Эта плоскость пересекает прямую HO в точке S, координаты которой задаются системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^1 - 0}{\frac{1}{3} - 0} = \dfrac{x^2 - 0}{\frac{1}{3} - 0} = \dfrac{x^3 - 0}{\frac{1}{3} - 0} = t \\ 2x_3 = 1 - x^1 - x^2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x^1 = x^2 = x^3 \\ x^3 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

и, таким образом, координаты точки S суть $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

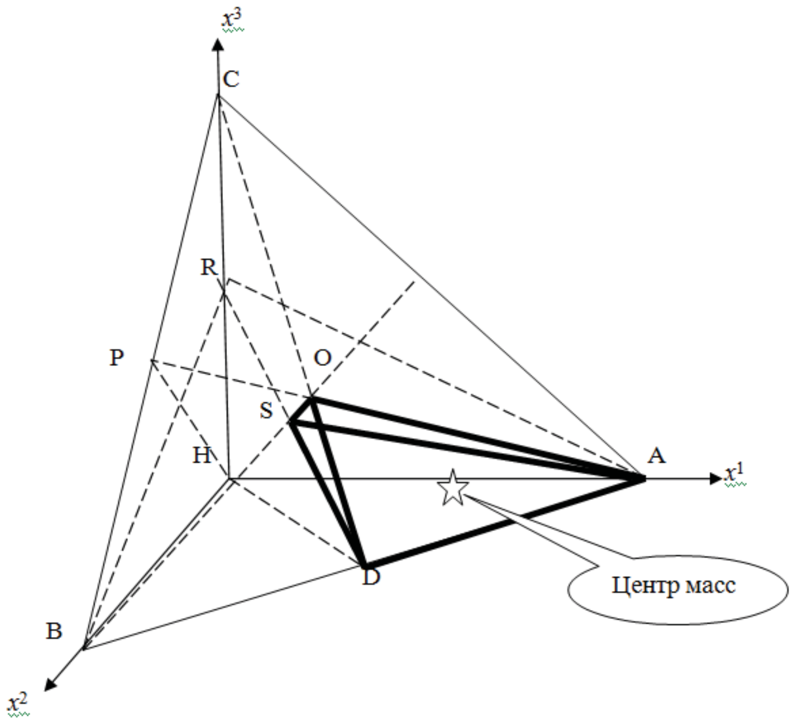

Рисунок 6 – К построению множества неопределённости весовых коэффициентов трех критериев при политике сравнительной важности критериев <4;1, 1, 1, 1>

Перейдем к определению центра масс этого тетраэдра. Известно, что центр масс тетраэдра лежит на прямой, соединяющей вершину тетраэдра с центром масс противоположной грани на расстоянии три четверти отрезка, считая от этой вершины.

Таким образом, множество неопределенности коэффициентов важности критериев представлено тетраэдром *ADOS*. Как показано выше для политики <3; 1, 1, 1> координаты центра масс грани *ADO* равны $(\frac{11}{18}, \frac{5}{18}, \frac{1}{9})$. Поэтому уравнение отрезка, соединяющего с центром масс грани *ADO* вершину S таково:

$$\frac{x^1 - \frac{1}{4}}{\frac{11}{18} - \frac{1}{4}} = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{4}} = \frac{x^3 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{9} - \frac{1}{4}} = k$$

или $x^1 = \frac{1}{4} + \frac{13}{36}k,\ x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{36}k,\ x^3 = \frac{1}{4} - \frac{5}{36}k$.

Подставляя $k = \frac{3}{4}$, окончательно получим $x^1 = \frac{25}{48},\ x^2 = \frac{13}{48},\ x^3 = \frac{7}{48}$ и $x^4 = \frac{1}{16}$.

Аналогично можно получить и остальные результаты для различных комбинаций распределения четырех критериев по группам важности, показанные в таблице 6.

5 Численный расчёт универсальных коэффициентов важности для пяти и шести критериев

В предыдущем разделе статьи приведены результаты, которые удалось получить аналитическим путем. При большем числе критериев, чем четыре, наглядные геометрические представления невозможны, поэтому приходится вычислять коэффициенты численно, используя датчик случайных чисел.

В таблицах 7 и 8 представлены значения универсальных коэффициентов важности частных критериев для задач многокритериального выбора, рассчитанные с использованием

Таблица 6 – Точные значения универсальных коэффициентов важности для двух, трёх и четырёх критериев в задаче принятия решения

Число частных критериев в задаче принятия решений	Количество критериев в каждой группе важности					Универсальные значения коэффициентов важности критериев				
	Группа важности критериев					Группа важности критериев				
	B1	B2	B3	B4	B5	B1	B2	B3	B4	B5
2	2					1/2				
	1	1				1/4	3/4			
3	3					1/3				
	2	1				7/36	11/18			
	1	2				1/9	4/9			
	1	1	1			1/9	5/18	11/18		
4	4					1/4				
	3	1				1/6	25/48			
	2	2				5/48	19/48			
	1	3				1/16	15/48			
	2	1	1			5/48	13/48	25/48		
	1	2	1			1/16	5/24	25/48		
	1	1	2			1/16	7/48	19/48		
	1	1	1	1		1/16	7/48	13/48	25/48	

Таблица 7 – Численные значения универсальных коэффициентов важности для двух, трёх и четырёх критериев в задаче принятия решения

Число частных критериев в задаче принятия решений	Универсальные значения коэффициентов важности критериев				Универсальные значения коэффициентов важности критериев			
	Группа важности критериев				Группа важности критериев			
	B1	B2	B3	B4	B1	B2	B3	B4
2	2				0,500			
	1	1			0,250	0,750		
3	3				0,333			
	2	1			0,194	0,611		
	1	2			0,111	0,444		
	1	1	1		0,111	0,277	0,611	
4	4				0,250			
	3	1			0,167	0,521		
	2	2			0,104	0,396		
	1	3			0,063	0,313		
	2	1	1		0,104	0,271	0,521	
	1	2	1		0,063	0,208	0,521	

встроенного датчика случайных чисел (ДСЧ) MicroSoft Excel. Расчеты показали, что уже при четырех критериях результаты несколько отличаются от рассчитанных по точным формулам, причем увеличение количества испытаний к уменьшению ошибки не приводит, то есть начинает сказываться качество ДСЧ как генератора псевдослучайных чисел. Поэтому при расчете таблиц коэффициентов для числа критериев большего, чем шесть, необходимо будет предварительно оценивать качество применяемого ДСЧ.

Таблица 8 – Численные значения универсальных коэффициентов важности для пяти и шести критериев в задаче принятия решения

Число частных критериев в задаче принятия решений	Количество критериев в каждой группе важности						Универсальные значения коэффициентов важности критериев					
	Группа важности критериев						Группа важности критериев					
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B1	B2	B3	B4	B5	B6
5	1	1	1	1	1		0,038	0,087	0,154	0,256	0,464	
	1	1	1	2			0,038	0,087	0,153	0,361		
	1	1	2	1			0,038	0,087	0,205	0,464		
	1	1	3				0,038	0,085	0,292			
	1	2	1	1			0,038	0,121	0,255	0,466		
	1	2	2				0,038	0,121	0,361			
	1	3	1				0,038	0,165	0,466			
	1	4					0,037	0,238				
	2	1	1	1			0,064	0,155	0,254	0,464		
	2	1	2				0,063	0,153	0,361			
	2	2	1				0,063	0,204	0,467			
	2	3					0,062	0,292				
	3	1	1				0,093	0,254	0,465			
	3	2					0,094	0,359				
	4	1					0,135	0,460				
	5						0,200					
6	1	1	1	1	1	1	0,026	0,057	0,098	0,154	0,240	0,427
	1	1	1	1	2		0,026	0,058	0,099	0,154	0,332	
	1	1	1	2	1		0,026	0,058	0,099	0,198	0,422	
	1	1	1	3			0,026	0,057	0,098	0,273		
	1	1	2	1	1		0,026	0,058	0,128	0,241	0,420	
	1	1	2	2			0,026	0,057	0,127	0,332		
	1	1	3	1			0,026	0,057	0,165	0,421		
	1	1	4				0,025	0,056	0,230			
	1	2	1	1	1		0,026	0,079	0,157	0,240	0,418	
	1	2	1	2			0,026	0,079	0,155	0,330		
	1	2	2	1			0,026	0,079	0,199	0,419		
	1	2	3				0,025	0,078	0,273			
	1	3	1	1			0,025	0,105	0,241	0,417		
	1	3	2				0,025	0,104	0,330			
	1	4	1				0,025	0,139	0,418			
	1	5					0,025	0,195				
	2	1	1	1	1		0,043	0,101	0,156	0,239	0,417	
	2	1	1	2			0,043	0,101	0,155	0,330		
	2	1	2	1			0,043	0,101	0,198	0,418		
	2	1	3				0,043	0,099	0,272			
	2	2	1	1			0,043	0,129	0,24	0,416		
	2	2	2				0,042	0,128	0,330			
	2	3	1				0,042	0,166	0,417			
	2	4					0,042	0,229				
	3	1	1	1			0,063	0,157	0,239	0,414		
	3	1	2				0,062	0,156	0,328			
	3	2	1				0,063	0,199	0,415			
	3	3					0,062	0,271				
	4	1	1				0,087	0,241	0,413			
	4	2					0,086	0,328				
	5	1					0,117	0,414				
	6						0,167					

6 Обсуждение

Полученные результаты позволяют провести разноплановое количественное исследование понятия важности, исходя из строгих математических результатов, полученных на основе всего двух естественных гипотез 1 и 2. Для этого в качестве экспериментального материала используем данные, приведённые в таблицах 6-8.

6.1 Итак, насколько же «важнее» означает «больше»?

Прежде всего, из таблиц 7 и 8 видно, что в числовом выражении важность отдельного объекта в сравниваемом ряду (в нашем случае, важность частного критерия) определяется не только тем, к какой группе важности он отнесён, но и общим числом рассматриваемых объектов и тем, как при этом распределяются объекты по группам важности. Таким образом, ***единого числового ряда, обоснованно отвечающего порядковой шкале уровней важности, не существует – для каждого числа критериев и их распределения по группам важности этот ряд свой.*** Например, в задаче с пятью группами важности в зависимости от числа критериев и их распределения по этим группам коэффициенты важности относятся то как

1 : 2,2 : 3,8: 7,6 : 16,2 (для политики выбора <6; 1, 1, 1, 2, 1>),

то как **1 : 2,3: 3,6: 5,6: 9,2** (для политики выбора <6; 1, 2, 1 , 1, 1>).

При этом отношения двух соседних коэффициентов важности также различны: **2,2 : 1,7: 2,0: 2,1** и **1 : 2,3: 1,5 : 1,5 : 1,7** соответственно.

В конкретной задаче принятия решения следует найти соответствующую строчку в таблицах универсальных коэффициентов важности (подобных таблицам 7 и 8) и использовать указанный в них числовой ряд.

Представляет интерес, насколько стабильным является отношение коэффициентов важности для двух соседних групп важности по всему массиву возможных политик выбора, представленных в таблицах 7 и 8. В таблице 9 показано отношение коэффициента важности «более важного» критерия к коэффициенту важности «ближайшего менее важного» критерия. Среднее значение этого отношения равно **2,44**, но разброс значений настолько велик (стандартное отклонение равно 5,13), что использовать это, как и любое другое, значение в качестве универсального для любых задач принятия решений не представляется возможным.

Таблица 9 - Распределение значений отношения коэффициентов важности двух соседних по важности критериев при различных политиках сравнения

Диапазон значений отношения коэффициентов важности двух соседних по важности критериев		Частота (%)	Диапазон значений отношения коэффициентов важности двух соседних по важности критериев		Частота (%)
от	до		от	до	
1	1,25	11,03	4,5	4,75	0,69
1,25	1,5	0,00	4,75	5	0,69
1,5	1,75	14,48	5	5,25	0,00
1,75	2	11,03	5,25	5,5	0,69
2	2,25	14,48	5,5	5,75	0,69
2,25	2,5	12,41	5,75	6	0,00
2,5	2,75	8,28	6	6,25	0,00
2,75	3	3,45	6,25	6,5	0,69
3	3,25	10,34	6,5	6,75	0,00
3,25	3,5	2,76	6,75	7	0,00
3,5	3,75	0,69	7	7,25	0,00
3,75	4	3,45	7,25	7,5	0,00
4	4,25	2,07	7,5	7,75	0,00
4,25	4,5	1,38	7,75	8	0,69

Можно рассчитать и средние относительные значения универсальных коэффициентов важности критериев для всего массива задач принятия решений, представленного в таблицах 7 и 8: **1 : 3,2 : 6,5 : 9,9 : 13,2 :16,4** или, ещё более округлённо, **1 : 3 : 6 : 10 : 16**.

Однако, нет никаких оснований использовать их при решении конкретной задачи, поскольку есть возможность получить оптимальные именно для этой задачи значения из таблицы универсальных коэффициентов важности.

6.2 Как соотносится предлагаемый подход с методом анализа иерархий Т. Саати?

Представляет интерес сопоставить предлагаемый подход с упомянутом методом анализа иерархий, поскольку в этом методе используется именно универсальный числовой ряд для сравнительной количественной оценки объектов различной степени важности:

(7) **1 : 3 : 5 : 7 : 9**.

Мы полагаем, что, с учётом результатов, представленных в настоящей статье, было бы целесообразно модифицировать метод аналитических иерархий, сохранив его структурный аспект, но отказавшись от парного сравнения степени важности рассматриваемых объектов (в частности, критериев) и использования указанного числового ряда.

Действительно, сравнение пар объектов обладает двумя недостатками. Во-первых, в реальности человек не в состоянии столь дробно оценивать отличия в относительной важности объектов, как это предполагает метод анализа иерархий. Следует согласиться, что объяснения, приведённые в третьем столбце таблицы 1, не могут привести ЛПР к достаточно уверенным суждениям.

В-вторых отнесение сравниваемых объектов к нескольким различным группам важности значительно проще, не говоря уже о том, что этот процесс при n объектах требует от ЛПР всего n решений, тогда как парное сравнение – $n(n\text{-}1)/2$, что существенно больше. Так, при 6 критериях парное сравнение потребует 15 решений ЛПР вместо шести, а при десяти критериях – уже 45 очень сомнительных решений вместо десяти вполне определённых.

Наибольшие возражения вызывает использование числового ряда (7).

Он обоснован лишь эвристическими рассуждениями и примерами относительно успешного применения в ряде достаточно искусственных случаев, вроде определения опытными пассажирами самолетов «на глазок» расстояния между крупными городами.

Между тем, этот ряд не согласуется с ключевым положением, лежащим в основе самого метода анализа иерархий. В соответствии с этим положением, идеальная система количественной сравнительной оценки объектов должна быть такой, что если более важный объект в k раз важнее менее важного, то этот менее важный объект должен быть в $1/k$ раз больше более важного. При сравнении нескольких объектов строится квадратная матрица указанных коэффициентов и затем за комплексный коэффициент важности каждого объекта принимается величина, пропорциональная среднему геометрическому их элементов соответствующей ему строки. Отсюда следует, что указанная процедура при сравнении между собой пяти элементов возрастающей важности (назовем ее задачей А) на основе ряда (7) должна в итоге привести к ряду, совпадающему с исходным. Однако, как показывает расчет (таблица 10), результирующий ряд 1 : 1,93 : 3,94 : 8,01 : 15,49 от исходного существенно отличается. Если поставить оптимизационную задачу найти числа исходного числового ряда, которые приведут к максимально близким числам результирующего ряда, то можно получить такой оптимальный (подчеркнем, для данной конкретной задачи) ряд (таблица 11):

1 : 3: 9 : 27 : 81.

Более того, можно убедиться, что такому условию согласованности будет удовлетворять любая геометрическая прогрессия, например, 1 : 2 : 4 : 8 : 16.

Однако, если рассматривается близкая, но иная конфигурация сравнительной важности такого же количества объектов при таком же количестве уровней важности (назовём её задачей Б, таблицы 12, 13), то не только универсальный ряд (7) окажется несогласованным (результирующий ряд имеет вид 1 : 2 : 4,58 : 5,08 : 14,49), но и оптимальный для этой конкретной задачи ряд 1: 3 : 6,43 : 7,29 : 25,97 будет несогласованным (результирующий ряд 1 : 2,71 : 6,27 : 7,30 : 25,95).

Таблица 10 – Расчет относительной важности критериев в задаче А в методе анализа иерархий при исходном ряде 1 : 3 : 5 : 7 : 9

Критерии	Критерии					Произведение коэффициентов	Среднее геометрическое	Весовые коэффициенты	Нормирование к меньшему коэффициенту
	К1	К2	К3	К4	К5				
К1	1	0,33	0,20	0,14	0,11	0,0010	0,25	0,03	1,00
К2	3	1	0,33	0,20	0,14	0,0285	0,49	0,06	1,93
К3	5	3	1	0,33	0,20	1	1,00	0,13	3,94
К4	7	5	3	1	0,33	35	2,04	0,26	8,01
К5	9	7	5	3	1,00	945	3,94	0,51	15,49
							7,72	1,00	

Таблица 11 – Расчёт относительной важности критериев в задаче А в методе анализа иерархий при оптимальном исходном ряде 1 : 3 : 9 : 27 : 81

Критерии	Критерии					Произведение коэффициентов	Среднее геометрическое	Весовые коэффициенты	Нормирование к меньшему коэффициенту
	К1	К2	К3	К4	К5				
К1	1	0,33	0,11	0,04	0,01	0,00002	0,11	0,01	1,00
К2	3	1	0,33	0,11	0,04	0,00412	0,33	0,02	3,00
К3	9	3	1	0,33	0,11	1	1,00	0,07	9,00
К4	27	9	3	1	0,33	243	3,00	0,22	27,00
К5	81	27	9	3	1,00	59049	9,00	0,67	81,00
							13,44	1,00	

Таблица 12 – Расчёт относительной важности критериев в задаче Б в методе анализа иерархий при исходном ряде 1 : 3 : 5 : 7 : 9

Критерии	Критерии					Произведение коэффициентов	Среднее геометрическое	Весовые коэффициенты	Нормирование к меньшему коэффициенту
	К1	К2	К3	К4	К5				
К1	1	0,33	0,20	0,20	0,11	0,00148	0,27	0,04	1,00
К2	3	1	0,33	0,33	0,14	0,04762	0,54	0,07	2,00
К3	5	3	1	1	0,20	3	1,25	0,17	4,58
К4	5	3	1	1	0,33	5	1,38	0,19	5,08
К5	9	7	5	3	1	945	3,94	0,53	14,49
							7,38	1,00	

Таблица 13 – Расчёт относительной важности критериев в задаче Б в методе анализа иерархий при оптимальном исходном ряде 1 : 3 : 6,43 : 7,29 : 25,97

Критерии	Критерии					Произведение коэффициентов	Среднее геометрическое	Весовые коэффициенты	Нормирование к меньшему коэффициенту
	К1	К2	К3	К4	К5				
К1	1	0,33	0,16	0,16	0,04	0,00031	0,20	0,02	1,00
К2	3	1	0,33	0,33	0,14	0,04571	0,54	0,06	2,71
К3	6,43	3	1	1,00	0,16	3,00000	1,25	0,14	6,27
К4	6,43	3	1	1	0,33	6,43	1,45	0,17	7,30
К5	25,97	7,29	6,43	3	1	3653,50	5,16	0,60	25,95
							8,59	1,00	

Таким образом, бо́льшую обоснованность и простоту применения, по нашему мнению, методу анализа иерархий придали бы следующие изменения:

- замена сравнения пар объектов их отнесением к различным группам важности;
- использование для объектов предлагаемых в настоящей статье универсальных коэффициентов важности.

6.3 Корректно ли осреднять после нормирования значения критериев, эквивалентных по важности?

Отметим ещё одну, на первый взгляд неожиданную, особенность понятия «важнее». Критерии, входящие в одну и ту же группу важности, измеренные в одинаковой шкале (например, после их нормализации), нельзя объединять, использовать вместо них значение некоторого «общего» критерия, равное среднему арифметическому их значений, хотя, в силу симметрии, их коэффициенты важности одинаковы.

Действительно, рассмотрим, например, политику <4; 1, 3> (таблица 7), при которой из четырех частных критериев три являются более важными, чем оставшийся. Казалось бы, эту задачу можно было бы свести к задаче с двумя группами важности критериев <2; 1, 1>, в которой значение более важного критерия равно среднему арифметическому значений трех исходных критериев. Однако это неверно, так как в исходной задаче весовой коэффициент менее важного критерия составляет 0,063, а среднего значения трех важнейших критериев 3*0,313= 0,919 (сумма приведенных чисел не равна в точности единице из-за ошибок округления), в то время как в редуцированной задаче соответствующие коэффициенты равны 0,25 и 0,75 соответственно. Таким образом, хотя используется линейная свёртка, транзитивность линейности не происходит.

6.4 Как «нумеризовать» качественную шкалу?

Качественная шкала (например, из таблицы 1), представляет собой совокупность объектов возрастающей важности, т.е. описывается политикой выбора вида <N; 1, 1,… 1>. Отсюда следует, что отвечающие этим объектам коэффициенты важности определяются соответствующими строками таблицы универсальных коэффициентов важности. Для качественной шкалы с пятью уровнями эти коэффициенты таковы (см. таблицу 7):

(8) **0,038 : 0,087 : 0,154 : 0,256 : 0,464**.

Если пересчитать их в относительные величины к значению коэффициента наименьшего уровня значимости, получим следующую «нумеризованную» качественную шкалу 1 : 2,29 : 4,05 : 6,74 : 12,21 (в отличие от ряда, предложенного в методе анализа иерархий). Если пересчитать (8), приняв наибольшее значение за 100, получим шкалу 8,19 : 18,75: 33,19: 55,17: 100,00 или, при округлении для удобства представления в практических задачах

8 : 19 : 33 : 55 : 100.

В таблице 14 представлены рассчитанные шкалы «нумеризации» качественных шкал от двух до десяти уровней. Каждый столбец таблицы отвечает числу уровней конкретной шкалы, а числа в нем показывают числовые эквиваленты отдельных ее уровней. Например, для 4-х уровневой «шкалы любви» с уровнями «не люблю, люблю, очень люблю, обожаю» числовые эквиваленты этих уровней будут равны соответственно 0, 18, 45, 100.

6.4 «Краевой эффект» таблицы универсальных коэффициентов важности критериев

Взгляд на таблицу универсальных коэффициентов важности критериев позволяет заметить ее интересную особенность: при фиксированном количестве критериев повторяющимся крайним (в начале и конце записи) фрагментам политики выбора отвечают одинаковые значения универсальных критериев, независимо от того, как распределяются критерии по группам важности. Так, в таблице 8 для пяти критериев при фрагменте «1, 2», расположенном в начале политики выбора, отвечающие ему коэффициенты важности всегда равны 0,038 и 0,121, а при расположении этого фрагмента в конце политики выбора отвечающие ему коэффициенты важности всегда равны 0,153 и 0,361. В то же время отвечающие такому же фрагменту коэффициенты при другом общем числе критериев, конечно, иные: так, при шести критериях они в начале списка коэффициентов – 0,026 и 0,079, а в конце списка коэффициентов – 0,155 и 0,330.

Таблица 14 - Универсальные коэффициенты важности различных уровней качественных шкал

Номер уровня	Универсальные коэффициенты важности различных уровней качественных шкал								
	Число уровней качественной шкалы								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10									100
9								100	58
8							100	58	40
7						100	57	39	28
6					100	56	38	27	20
5				100	55	36	25	19	14
4			100	51	33	23	16	13	9
3		100	45	27	19	13	10	8	5
2	100	33	18	12	8	6	4	3	2
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Эта особенность может быть использована при вычислении таблицы универсальных коэффициентов важности критериев. Возможно, она моделирует пока еще не осмысленные нами достаточно глубоко механизмы восприятия человеком сравнительной важности объектов.

Заключение

Используемая в векторной оптимизации линейная свертка критериев, при неоспоримых достоинствах, имела два существенных недостатка: неопределенность в задании числовых значений коэффициентов важности критериев и некорректность, связанная с возможным исключением отдельных Парето-оптимальных альтернатив [12]. Предложенный в статье переход к рассмотрению дискретного пространства политик выбора позволил избавить её от первого недостатка и облегчить процедуру принятия решений в практических задачах за счёт использования корректно обоснованных универсальных коэффициентов важности частных критериев. Более того, обнаружен ряд новых эффектов, связанных с понятием сравнительной важности объектов. Также удалось предложить модификацию широко известного метода анализа иерархий (аналитического планирования), повышающую его обоснованность и существенно упрощающую применение.

Представляется плодотворным продолжить в дальнейшем использование предложенного подхода, применив его к минимаксной свёртке Ю.Б. Гермейера [14], сам по себе свободный от второго из указанных недостатков. В случае успеха это позволит получить «идеальный» метод многокритериального сравнения альтернатив, использующий лишь единственное допущение: саму идею проводить сравнение альтернатив на основе комплексного критерия оптимальности.

Список источников

[1] ***Кини Р.Л., Райфа Х.*** Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./Под ред. И.Ф. Шахнова. М.: Радио и связь, 1981. - 560 с.
[2] ***Johannes J.*** Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer-Verlag, 2010. - 460 p.
[3] ***Ansari H.Q., Jen-Chih Yao***. Recent Developments in Vector Optimization. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer-Verlag, 2010. - 550 p.
[4] ***Hirotaka N., Yeboon Y., Min Y.*** Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. - 197 p.
[5] ***Смирнов О.Л., Падалко С.А., Пиявский С.А.*** САПР: формирование и функционирование проектных модулей. - М.: Машиностроение, 1987. -272 с.
[6] ***Пиявский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А***. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. М. «Машиностроение», 1974, - 106 с.
[7] ***Ларичев О.И.*** Теория и методы принятия решений, М.: Логос, 2000. - 295 с.
[8] ***Ларичев О.И.*** Вербальный анализ решений, ИСИ РАН. – М.: Наука, 2006. – 181 с.
[9] ***Saaty T. L.*** (1980) The Analytic Hierarchy Process. McGraw Hill. [Reprinted by RWS Publications, available electronically free, 2000].
[10] ***Саати Т., Кернс К.*** Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
[11] ***Саати, Т.*** Об измерении неосязаемого. Подход к относительным измерениям на основе главного собственного вектора матрицы парных сравнений, Электронный журнал Cloud of Science. 2015. Т. 2. №1, http://cloudofscience.ru
[12] ***Malyshev V.V., Piyavsky B.S., Piyavsky S.A***. A Decision Making Method Under Conditions of Diversity of Means of Reducing Uncertainty, Journal of Computer and Systems Sciences International. 2010. V. 49. № 1. p. 44-58.
[13] ***Malyshev V.V., Piyavsky S.A.*** The Confident Judgment Method In The Selection Of Multiple Criteria Solutions, Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. V. 54. № 5. p. 754-764.
[14] ***Гермейер Ю.Б***. Введение в теорию исследования операций. - М.: Наука, 1971. - 383 с.

HOW DO WE DIGITIZE THE CONCEPT OF «MORE IMPORTANT»

S.A. Piyavsky

Architecture and Construction Institute, Samara State Technical University, Samara, Russia
spiyav@mail.ru

Abstract

The problem of multi-criteria analysis is a key element in making complex decisions, retaining its relevance for over fifty years. A number of decision-making approaches and methods, allowing assumption of rationality of their results, have been proposed over the years. The main idea behind the majority of those methods is the linear convolution of partial criterions and the main difference lies in heuristic or expert methods, implicated in numerical expression of weight coefficients of the criteria. In light of this, it seems beneficial to find universal means of multi-criterion comparison of alternatives, based on a small number of natural axioms that are strictly mathematically sound and, at the same time, simple in practical application. The paper proposes an approach based on a transition from continuous space of weight coefficients of partial criterions importance towards a discreet space of behavior methods that is more natural for the decision-maker. This transition enabled a relatively simple classification of decision-making tasks and made possible to form a universal table of relative weights of partial criterions, applicable to any task of multi-criteria optimization on a set of alternatives. In addition, several new aspects of comparative analysis of multi-criteria alternatives were considered based on the analysis of the concept of "importance". In particular, the invalidity of averaging of normalized criteria values, considered to be of equivalent importance had been shown; also, the so-called "edge effect" which consists in the constancy of the chains of relative importance coefficients of criteria that meet the same extreme fragments of the decision-making policy. A comparative analysis of the proposed method with the well-known method of analytic hierarchy, proposed by Thomas Saaty was carried out and a modification, allowing to increase the ease of use and validity of this method, was developed.

Key words: *decision-making, multi-criteria analysis, universal importance coefficients, hierarchy analysis method, analytic planning.*

Citation: *Piyavsky SA*. How do we digitize the concept of «more important». *Ontology of Designing*. 2016; 6(4): 414-435. DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-4-414-435.

References

[1] ***Keeney, R. & Raiffa, H.*** Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. 1976. - New York: Wiley
[2] ***Johannes J.*** Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer-Verlag, 2010. - 460 p.
[3] ***Ansari H.Q., Jen-Chih Yao.*** Recent Developments in Vector Optimization. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer-Verlag, 2010. - 550 p.
[4] ***Hirotaka N., Yeboon Y., Min Y.*** Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. - 197 p.
[5] ***Smirnov OL, Padalko SA, Piyavsky SA***. CAD: the formation and operation of the project modules [In Russian]. - M.: Engineering, 1987. -272 p.
[6] ***Piyavsky SA, Brusov VS, Hvilon EA***. Optimization of the parameters of multi-purpose aircraft [In Russian]. M. Engineering, 1974. - 106 p.
[7] ***Larichev OI.*** Theory and methods of decision making [In Russian]. - M.: Logos, 2000. - 295 p.
[8] ***Larichev OI.*** Verbal Decision Analysis [In Russian], RAS ISI. - M.: Nauka, 2006 - 181 p.
[9] ***Saaty TL***. (1980) The Analytic Hierarchy Process. McGraw Hill. [Reprinted by RWS Publications, available electronically free, 2000].
[10] ***Saaty TL, Kearns KP.*** Analytical planning: the organization of systems. Pergamon Press, 1985 - Business & Economics - 208 p.
[11] ***Saaty TL***. On the Measurement of Intangibles. A Principal Eigenvector Approach to Relative Measurement Derived from Paired Comparisons. Notices of the American Mathematical Society 60(2) · February 2013.
[12] ***Malyshev VV, Piyavsky BS, Piyavsky SA.*** A Decision Making Method Under Conditions Of Diversity Of Means Of Reducing Uncertainty, Journal of Computer and Systems Sciences International. 2010. V. 49. № 1. p. 44-58.
[13] ***Malyshev VV, Piyavsky SA.*** The Confident Judgment Method In The Selection Of Multiple Criteria Solutions, Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. V. 54. № 5. p. 754-764.
[14] ***Germeier YB.*** Introduction to Operations Research [In Russian]. - M.: Nauka, 1971. - 383 p.

Сведения об авторе

Пиявский Семен Авраамович (1941 г.р.). Окончил факультет летательных аппаратов Куйбышевского авиационного института в 1964 г., аспирантуру при кафедре динамики полета Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе в 1967 г. Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Архитектурно-строительного института Самарского государственного технического университета. Почетный работник высшей школы РФ, академик Академии наук о Земле и Академии нелинейных наук. Опубликовал более 350 научных работ в области системного анализа, методов оптимизации и принятия решений, математического моделирования, образовательных систем и технологий.

Semen Avraamovich Piyavsky (b. 1941). Graduated from Kuibyshev Aviation Institute in 1964 and received a postgraduate degree (1967) at the Flight Dynamics Department at the Moscow Aviation Institute named after Ordzhonikidze. Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science at Architecture and Construction Institute of Samara State Technical University. Honored Worker of Higher School of Russia, Academician of the Academy of Earth Sciences and Academy of Nonlinear Sciences. He has published over 350 scientific papers in the field of system analysis, optimization techniques and decision-making, mathematical modeling, education systems and technologies.