

УДК 629.7

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИЛОВЫХ АДДИТИВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

В.А. Комаров

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия
vkomarov@ssau.ru

Аннотация

Рассматриваются взаимосвязи и взаимное влияние в триаде основных инженерных понятий – материал, технология, конструкция. Обсуждаются возможности аддитивных технологий по созданию новых конструкций и материалов. Ставится и решается задача об оптимальном распределении материала в теле с переменной плотностью. Предлагается алгоритм топологической оптимизации силовых конструкций из материала с переменной плотностью по критерию минимума массы. Основные механические свойства гипотетического материала предполагаются пропорциональными его плотности. Рассматриваются ограничения по прочности и жёсткости при одном и нескольких случаях нагружения. Обсуждается и уточняется содержание понятий «оптимальная» и «рациональная» конструкция. Предлагается объективный критерий «силовой фактор», который учитывает величину и протяжённость действия внутренних усилий, для сравнения весового совершенства различных вариантов конструкций и оценки их близости к теоретически оптимальному решению. Приводятся примеры проектирования плоских и пространственных конструкций. Как одно из возможных направлений дальнейшего развития аддитивных технологий формулируются задачи по разработке новых материалов и способов создания структур с переменной плотностью.

Ключевые слова: аддитивные технологии, проектирование, конструкция, прочность, жёсткость, материал, оптимизация, тело переменной плотности.

Цитирование: Комаров, В.А. Проектирование силовых аддитивных конструкций: теоретические основы / В.А. Комаров // Онтология проектирования. – 2017. – Т. 7, №2(24). – С. 191-206. – DOI: 10.18287/2223-9537-2017-7-2-191-206.

Введение

Значительную часть искусственной окружающей среды составляют конструкции различного назначения. При разработке многих из них предъявляются требования достаточной прочности и жёсткости при минимуме массы. На протяжении всего развития цивилизации решение таких задач находится в триаде: материал – технология – конструкция. В зависимости от важности или новизны одного из этих компонентов устанавливается классификация конструкций: каменные, металлические, литые, клёпаные, сварные, тонкостенные и другие. Каждый из этих классов конструкций имеет свои специфические методы проектирования.

Совсем недавно появился принципиально новый метод создания конструкций – аддитивные технологии [1, 2]. Возможности этого метода и отдельных направлений его развития многообразны и сулят большой технический эффект [3]. Метод позволяет изготавливать конструкции из самых различных материалов: полимеров, металлов, керамики и всевозможных комбинаций из них [4]. Стало возможным производство монолитных конструкций с внутренними полостями, стержневыми структурами внутри оболочек и т.д.

Возникает вопрос: как наилучшим образом использовать эти новые возможности? На первых порах практическое внедрение аддитивных технологий началось с повторного изготовления существующих конструкций сложных форм, которые были ранее спроектированы

по традиционным методам из изотропных материалов. Этот подход позволяет отказаться от таких сложных производственных технологий, как штамповка, литьё, сварка, механическая обработка и т.п. Однако, при этом новые технологические возможности аддитивных методов не используются в полной мере. Одна из причин такого положения состоит в том, что быстрое развитие аддитивных технологий не обеспечено должным образом теоретическими работами. Здесь уместно напомнить известное положение из диалектики: «Теория без практики мертва, но теория указывает путь практике».

Возможности аддитивных технологий позволяют задуматься о создании сверхлёгких конструкций практически без оглядки на технологические ограничения. Поэтому, с точки зрения теории, интересно знать, как выглядит предел совершенства конструкций в каждом конкретном случае: при заданных геометрических ограничениях на размещение конструкции, условиях закрепления и действующих внешних воздействиях.

1 Задачи проектирования конструкций

В проектировании конструкций полезно выделить два основных вида деятельности: выбор структуры конструкции и выбор рациональных размеров её элементов. Первый вид проектной деятельности в русскоязычной литературе называется «выбор силовой схемы». Второй вид называется «параметрическая оптимизация» в связи с удобством формализации задач в терминах нелинейного математического программирования. Силовая схема предопределяет пути передачи сил. Назначение рациональных размеров элементов конструкции направлено на обеспечение условий прочности и жёсткости при минимальном расходе материала. В последнее время первый вид деятельности под влиянием зарубежной технической литературы стал обозначаться термином *topology optimization* – «топологическая оптимизация», а второй вид – *sizing* – «образмеривание».

В проектировании силовых конструкций до последнего времени существенную роль играет накопленный опыт и инженерная интуиция. Особенно это касается выбора структуры. Практика выработала два принципа проектирования, направленных на создание эффективных конструкций.

Первый принцип – передача усилий по кратчайшим путям. Иногда это очень просто. Например, на рисунке 1а показана передача сосредоточенной силы P к заделке. Оптимальное решение – стержень, соединяющий точки А и В. При изменении направления силы P на некоторый угол, например, на 90° , выбор оптимальной структуры не очевиден.

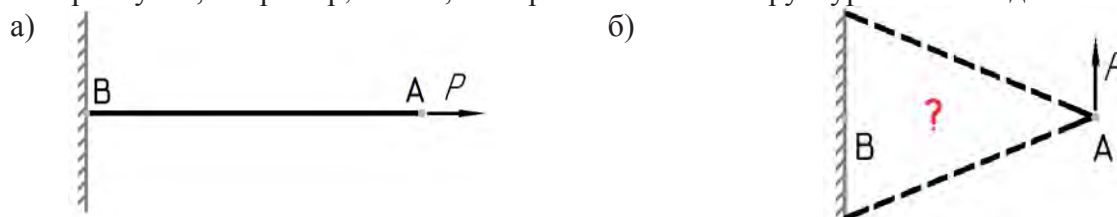
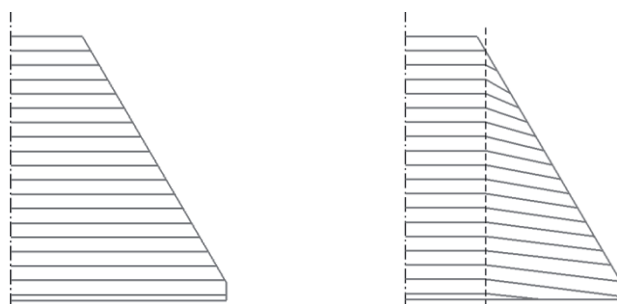


Рисунок 1 – Варианты передачи усилий в конструкции

Ещё сложнее принять решение, например, в трёхмерной задаче о выборе конструкции крыла малого удлинения. На рисунке 2 показаны два варианта решения по ориентации лонжеронов и стрингерного набора. В варианте а) прослеживается интуитивное стремление конструктора передавать воздушную нагрузку по кратчайшим путям, но при этом в длинных задних лонжеронах из-за малой строительной высоты будут возникать большие усилия в поясах. Не исключено, что схема б), которая организует передачу воздушной нагрузки через зоны крыла с большой строительной высотой, окажется более выгодной в весовом отноше-

нии. Выбор оптимальной конструкции в этой задаче требует применения специальных методов [5].

Второй принцип, существенный для многих случаев нагружения, – эффективная работа одних и тех же элементов конструкции при различных вариантах нагружения. Второй принцип можно упрощённо сформулировать как обеспечение «взаимопомощи» элементов друг другу. Его хорошо иллюстрирует известная задача Разани [6]. Ферма, показанная на рисунке 3, нагружается либо силой P_1 , либо силой P_2 .



а) интуитивное решение

б) альтернативное решение

Рисунок 2 – Крыло малого удлинения

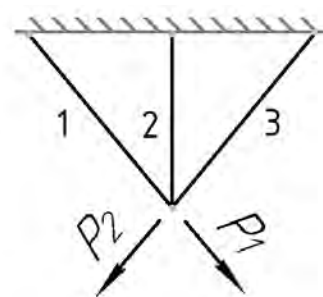


Рисунок 3 – Трёхстержневая ферма

Равнопрочная статически определимая ферма с двумя стержнями 1 и 3 имеет массу больше, чем статически неопределимая неравнопрочная ферма со стержнем 2, который работает в обоих случаях нагружения и частично разгружает стержни 1 и 3 в каждом из случаев нагружения. Решение подобных задач на практике также требует применения специальных методов оптимизации.

2 Конструкции с минимальной потенциальной энергией деформации

Для демонстрации некоторых теоретических идей и методов поиска идеальных конструкций, которые могут быть эффективными в сочетании с практически неограниченными возможностями аддитивных технологий, рассмотрим задачу о проектировании конструкции с минимальной потенциальной энергией деформации [7-10]. Будем считать, что конструкция выполнена из ограниченного по массе m количества гипотетического материала с линейной зависимостью модуля упругости E и допускаемого напряжения $[\sigma]$ от плотности ρ :

$$(1) \quad E = \rho \cdot \bar{E},$$

$$(2) \quad [\sigma] = \bar{\sigma} \cdot \rho,$$

где \bar{E} и $\bar{\sigma}$ – модуль упругости и допускаемое напряжение при единичной плотности. Назначим некоторое количество материала m для создания 3D-модели, границы которой определяются заданными геометрическими ограничениями. Разобьём модель сеткой конечных твердотельных элементов. Предположим, что все исходные конечные элементы имеют одинаковые значения плотности и модуля упругости:

$$(3) \quad \rho_{0i} = \frac{m}{V},$$

$$(4) \quad E_{0i} = \rho_{0i} \cdot \bar{E},$$

где индекс 0 – начальное распределение материала, i – номер элемента, V – общий объём всех конечных элементов.

Рассматриваемую задачу оптимизации можно сформулировать как поиск конструкции с минимальной потенциальной энергией деформации при условии постоянства массы:

$$(5) \quad U \rightarrow \min \text{ при } m = \text{const}$$

Плотности конечных элементов будем рассматривать в качестве проектных переменных:

$$(6) \quad x_i = \rho_i, \quad i = 1 \dots n,$$

где n – номер элемента в конечно-элементной модели. Проектные переменные ρ_i ограничены условием сохранения массы конструкции:

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot V_i = m,$$

где V_i – объем i -го элемента.

Начальное (равномерное) распределение плотности материала в конструкции вычислим через объём конечных элементов:

$$(8) \quad \rho_{0i} = m \cdot \left(\sum_{i=1}^n V_i \right)^{-1}$$

Рассчитаем напряженно-деформированное состояние (НДС) этой конструкции и вычислим эквивалентные напряжения в каждом элементе по удельной потенциальной энергии деформации:

$$(9) \quad \sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

Предполагая размеры элементов достаточно малыми, потенциальную энергию деформации 3D-модели запишем в следующем виде:

$$(10) \quad U = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{eq_{0i}}^2}{2 \cdot \rho_i \cdot E} \cdot V_i$$

При вычислениях по (10) предположим также, что *напряжения* в конечных элементах остаются *неизменными*, в то время как *плотности* ρ_i *могут изменяться*.

Воспользуемся методом множителей Лагранжа для поиска оптимальных значений плотностей элементов с учётом указанных допущений. Запишем следующую систему уравнений:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \rho_i} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, n); \\ \varphi(\rho_i) = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot V_i - m = 0; \end{cases}$$

где λ - множитель Лагранжа, φ - вспомогательная функция, отражающая постоянство массы (7).

С учётом (10) получим:

$$(12) \quad \begin{cases} -\frac{\sigma_{eq_{0i}}^2 \cdot V_i}{2 \cdot E \cdot \rho_i^2} + \lambda \cdot V_i = 0, (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot V_i - m = 0; \end{cases}$$

Откуда

$$(13) \quad \rho_{1i} = \frac{\sigma_{eqv_{0i}}}{\sqrt{2 \cdot E \cdot \lambda}}$$

Учитывая условие постоянства массы при изменении плотностей (7), новое распределение значений плотностей для каждого элемента запишем в следующем виде:

$$(14) \quad \rho_{1i} = \sigma_{eqv_{0i}} \cdot \frac{m}{\sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{0i}} \cdot V_i},$$

где ρ_{1i} - новое распределение плотностей, используемое в дальнейшем в итерационном процессе вместо исходного ρ_{0i} . Отметим простой физический смысл (14): *новые плотности элементов назначаются пропорционально действующим в них напряжениям.*

Новым плотностям соответствует потенциальная энергия деформации U_{0-1} , определяемая напряжениями $\sigma_{eqv_{0i}}$. Потенциальная энергия U_{0-1} вычисляется путём подстановки плотностей ρ_{1i} в (10). Начальное значение потенциальной энергии U_0 конструкции определяется напряжениями $\sigma_{eqv_{0i}}$ и плотностями элементов ρ_{0i} . Новое значение потенциальной энергии U_{0-1} , исходя из смысла решения оптимизационной задачи (11), будет меньше, чем исходное:

$$(15) \quad U_0 > U_{0-1}$$

При этом 3D-модель с распределением плотностей ρ_{0i} даёт распределение напряжений σ_{0i} , которое соответствует условиям равновесия и совместности деформаций. В теле переменной плотности (ТПП) с другим распределением плотностей ρ_{1i} распределение напряжений σ_{0i} удовлетворяет только условиям равновесия, но не совместности деформаций.

Распределению плотностей элементов ρ_{1i} соответствует распределение напряжений σ_{1i} и потенциальная энергия U_1 . В соответствии с принципом минимума энергии деформации:

$$(16) \quad U_{0-1} > U_1$$

Перерасчёт плотностей элементов по (14) и НДС, при котором новое распределение плотностей используется в качестве исходных данных, приводит к последовательности конструкций с потенциальными энергиями

$$(17) \quad U_0 > U_{0-1} > U_1 > U_{1-2} > U_2 > \dots$$

Эта монотонно убывающая последовательность ограничена снизу, поскольку энергия деформации величина положительная. Снижение значения потенциальной энергии до минимально возможного значения представляет собой поиск такого распределения плотностей, при котором конструкция обладает максимальной жёсткостью.

В процессе оптимизации плотности некоторых элементов могут обратиться в ноль, т.е. произойдёт вырождение элементов. При этом интенсивность деформации в невырожденных элементах становится одинаковой. Рассмотрим расчёт интенсивности деформаций в каждом элементе i на $j+1$ итерации с учётом новых плотностей, определённых по (14):

$$(18) \quad \varepsilon_{j+1i} = \frac{\sigma_{eqv_{j+1i}} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{ji}} \cdot V_i}{m \cdot \sigma_{eqv_{ji}} \cdot \bar{E}}$$

Когда напряжения $\sigma_{eqv_{j+1i}}$ становятся достаточно близкими к напряжениям $\sigma_{eqv_{ji}}$, процесс сходится, и получается следующее выражение, характеризующее интенсивность деформаций во всех невырожденных элементах:

$$(19) \quad \varepsilon_{j+1i} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{ji}} \cdot V_i}{m \cdot E} \approx const$$

Основное расчётное соотношение итерационного алгоритма (14) при достижении сходимости, т.е. достаточно малых изменений напряжений и плотностей в каждом элементе, можно записать следующим образом, опустив номера соседних итераций:

$$(20) \quad \frac{\sigma_{eqv_i}}{\rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_i} \cdot V_i}{m} \approx const$$

Откуда следует, что найденное решение представляет собой равнонапряжённое в смысле гипотезы (2) ТПП.

ТПП с минимальной энергией деформации обладает ещё одним интересным и полезным для практических приложений свойством. Выберем из последовательности (17) «промежуточные» значения энергии

$$(21) \quad U_{0-1} > U_{1-2} > \dots,$$

которые также образуют сходящуюся последовательность. Запишем выражения для этих величин, используя подстановку (14) в (10):

$$(22) \quad \frac{1}{2 \cdot E \cdot m} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{0i}} \cdot V_i \right)^2 > \frac{1}{2 \cdot E \cdot m} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{1i}} \cdot V_i \right)^2 > \dots$$

Обозначим переменную величину $\sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{ji}} \cdot V_i$ в последовательности (22) символом G_j ,

где индекс j обозначает номер итерации, и будем называть её силовым фактором, следуя [11] – «load carrying factor» (LCF).

В процессе оптимизации эти величины также образуют сходящуюся последовательность $G_0 > G_1 > \dots$ и достигают минимума в конструкции с минимальной энергией деформации.

Если не использовать конечно-элементных представлений, то величину силового фактора можно определить в общем виде как интеграл от эквивалентных напряжений по объёму конструкции:

$$(23) \quad G = \int_V \sigma_{eqv} \cdot dV$$

Силовой фактор учитывает одновременно величину внутренних усилий в конструкции и протяжённость их действия.

В простейшем случае стержневой конструкции (фермы) силовой фактор – это сумма модулей усилий N в стержнях, умноженных на их длину l

$$(24) \quad G_{truss} = \sum_{i=1}^n |N_i| \cdot l_i$$

Через силовой фактор и допускаемое напряжение $[\sigma]$ может быть вычислен теоретически необходимый объём V_T стержневой или тонкостенной конструкции из традиционного материала или теоретически необходимая масса m_T конструкции из материала переменной плотности со свойством (2)

$$(25) \quad V_T = \frac{G}{[\sigma]}$$

$$(26) \quad m_T = \frac{G}{\sigma}$$

Чем меньше силовой фактор, тем конструкция легче. Вычислительные эксперименты показывают, что силовой фактор стержневых и тонкостенных безмоментных конструкций определяется в основном силовой схемой и относительно слабо зависит от распределения материала. Силовой фактор трёхмерных конструкций из материала с переменной плотностью сильно зависит от распределения плотностей и может уменьшаться на десятки процентов в процессе оптимизации. Интегральная величина – силовой фактор – позволяет построить эффективные, так называемые «весовые формулы», для прогнозирования и сравнения массы конструкций на ранних стадиях проектирования [12].

3 Топологическая оптимизация пространственных конструкций

На основе рассмотренного решения задачи о минимизации потенциальной энергии конструкции переменной плотности может быть предложен следующий эвристический алгоритм топологической оптимизации с учётом ограничений по прочности при многих случаях нагружения.

1) В геометрические ограничения конструкции вписывается непрерывная упругая среда, разбиваемая сеткой конечных элементов типа “solid”.

2) Задаются начальное распределение материала во всех элементах конструкции и минимально допустимая величина плотности элементов ρ_{\min} . Удобно использовать $\rho_{0i} = const > \rho_{\min}$, здесь индекс 0 - номер итерации. ρ_{\min} может быть достаточно малой величиной, необходимой только для вычисления НДС ТПП.

3) Вычисляется масса конструкции

$$(27) \quad m_0 = \sum_{i=1}^n \rho_{0i} \cdot V_i$$

4) Назначаются механические характеристики элементов.

5) Вычисляются по (1) и (2) удельные характеристики прочности $\bar{\sigma}$ и упругости \bar{E} предполагаемого к использованию конструкционного материала.

6) Выполняется расчёт НДС трёхмерного тела на заданные внешние нагрузки.

7) Вычисляются эквивалентные напряжения по определенной теории прочности, например по Мизесу, в каждом элементе для каждого случая нагружения

$$(28) \quad \sigma_{eqv}^2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)}$$

и выбираются максимальные $\sigma_{eqv_{\max ji}}$, где j – номер итерации, i – номер элемента.

8) Вычисляется интегральная характеристика – силовой фактор G

$$(29) \quad G_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{eqv_{\max ji}} \cdot V_i$$

9) Определяются избытки прочности каждого элемента

$$(30) \quad \eta_{ji} = \frac{\rho_{ji} \cdot \bar{\sigma}}{\sigma_{eqv_{\max ji}}}$$

Значения $\eta_{ji} < 1$ означают недостаточную прочность i -го элемента.

10) Выбирается минимальное значение $\eta_{j\min}$ по всем элементам, и пропорциональным изменением плотностей всех элементов определяется необходимая по прочности масса конструкции:

$$(31) \quad m_j^* = \frac{m_j}{\eta_{j\min}}$$

11) Вычисляются новые плотности элементов

$$(32) \quad \rho_{j+1i} = \frac{\sigma_{eqV_{\max ji}}}{\sigma}$$

12) Если $\rho_{j+1i} < \rho_{\min_i}$, то принимается $\rho_{j+1i} = \rho_{\min_i}$

13) Вычисляется масса конструкции m_1 с плотностями элементов ρ_{1i} (ρ_{j+1i} и масса m_j в итерационном процессе):

$$(33) \quad m_1 = \sum_{i=1}^n \rho_{1i} \cdot V_i$$

Эту величину можно назвать массой «условно равнопрочной конструкции», так как назначение новых плотностей по (31) вызывает изменение НДС конструкции и отклонение $\eta_{j\min}$ от единицы.

14) Вычисляются новые модули упругости и допускаемые напряжения элементов

$$(34) \quad E_{j+1i} = \rho_{j+1i} \cdot \bar{E}$$

$$(35) \quad [\sigma]_{j+1i} = \rho_{j+1i} \cdot \bar{\sigma}$$

Далее весь расчёт повторяется с п. 6 до стабилизации. Для контроля целесообразно использовать условие $1 - \eta_{\min} \leq \varepsilon$, где ε - малая заданная величина, например 0,01 в инженерных расчётах. Сходимость данного процесса наблюдается через 10-30 итераций в зависимости от особенностей задач.

В завершение оптимизации анализируется распределение материала и главных напряжений внутри заданных геометрических ограничений проектируемой конструкции. По результатам анализа предлагается несколько вариантов конструкций, которые могут быть изготовлены традиционными способами или с использованием аддитивных технологий. Сравнение силового и весового совершенства вариантов целесообразно делать с использованием критериев (29), (30), (31) и (33).

Приведенный алгоритм описан с подробностью, которая позволяет использовать его для реализации новой проектной парадигмы concurrent design – «технология точного попадания», описанной в [9]. Обращаем внимание на использование в нём новых для конструктора понятий «силовой фактор», «условно равнопрочная конструкция» и включение в проектный итерационный процесс известного понятия «избыток прочности» из традиционных поверочных расчётов в технологии эволюционного проектирования. Все эти три понятия имеют чёткое математическое описание. Наблюдение за изменениями указанных критериев в итерационном процессе обладает, по нашему мнению, большим обучающим потенциалом.

4 Примеры

4.1 Проектирование балки

В качестве простого примера проектирования и изготовления аддитивной конструкции рассматривалась балка, предназначенная для испытаний на трёхточечный изгиб. Геометрические ограничения балки, условия опирания, нагрузка и схема разбиения на элементы даны на рисунке 4. Здесь же показано распределение плотности материала на второй итерации. Оптимальное по критерию равнопрочности распределение плотности материала в ТПП показано на рисунке 5.

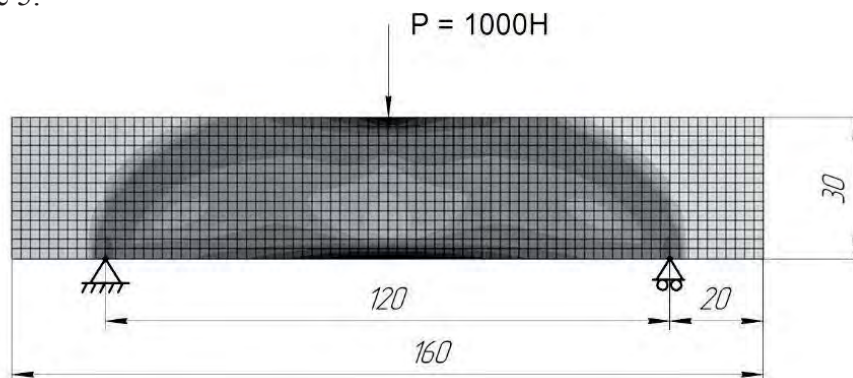


Рисунок 4 – Плоская проектная задача

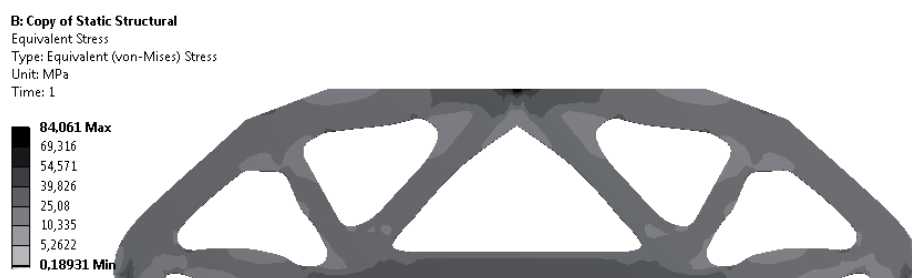


Рисунок 5 – Распределение плотностей в элементах конструкции

Структура конструкции, показанная на рисунке 6, может быть выбрана по этой информации как рациональная. Силовой фактор этой фермы имеет величину $G_{truss} = 0,221 \times 10^6$ Н·мм, что превышает показатель равнопрочного ТПП $G_{ТПП} = 0,201 \times 10^6$ на величину $\Delta = 9\%$.

На рисунке 6 показано испытание спроектированной и изготовленной аддитивной конструкции на трёхточечный изгиб до разрушения.

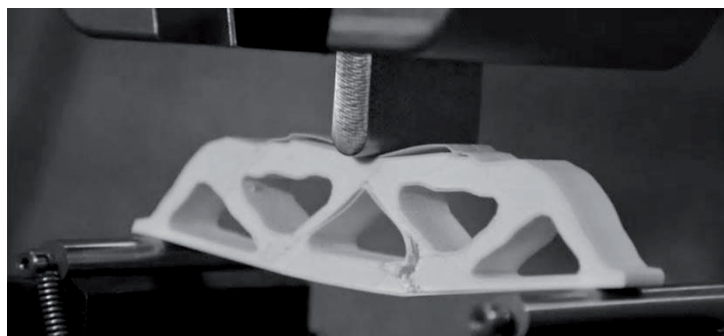


Рисунок 6 – Испытание рациональной аддитивной конструкции

Одновременно с фермой в едином технологическом процессе изготавливались стандартные образцы для снятия механических характеристик материала. Расчёт по методу конечных элементов разрушающего усилия для фермы по этим характеристикам дал удовлетворительное совпадение результатов.

Рассмотренная топологическая оптимизация плоских конструкций в настоящее время достаточно проработана для использования на практике. Другие возможные модели ТПП, отличные от (1) и (2), и интересные примеры решений можно найти в [13, 14].

Замечания о терминах.

В рассмотренном примере для описания эффективности проектов на вербальном уровне использованы термины «оптимальная» и «рациональная» конструкции. На наш взгляд, термин «оптимальная» уместно использовать когда чётко определены: целевая функция, проектные переменные и ограничения. Термин «рациональная» используется в современной технической литературе широко и не однозначно. Довольно часто он используется при принятии проектных решений с учётом многих факторов и многих параметров, которые хотелось бы получить в виде \max или \min . То есть речь идёт о компромиссах или множестве Парето, даже если оно и не упоминается ни в какой форме. В ряде случаев «рациональным» решением объявляется выбор из двух-трёх возможных вариантов. Поэтому в каждом конкретном тексте этот термин требует пояснений. Лучше всего, когда есть оценка предела совершенства, полученная из упрощённой или идеализированной задачи. Тогда о степени «рациональности» технического решения можно судить по «penalty» - уступке или недобору эффективности проекта по сравнению с идеалом. Например, коэффициент полезного действия тепловой машины определяет её эффективность по сравнению с идеальным циклом Карно. В нашем примере – это отношение реальной массы конструкции к теоретической, вычисляемой через силовой фактор.

4.2 Проектирование пространственной конструкции

Рассмотрим пример проектирования пространственной конструкции для передачи крутящего момента $M=10^8$ Н·мм внутри прямоугольного параллелепипеда ABCDEFGH, с размерами $AB=100$, $AD=500$, $AE=1000$ (см. рисунок 7).

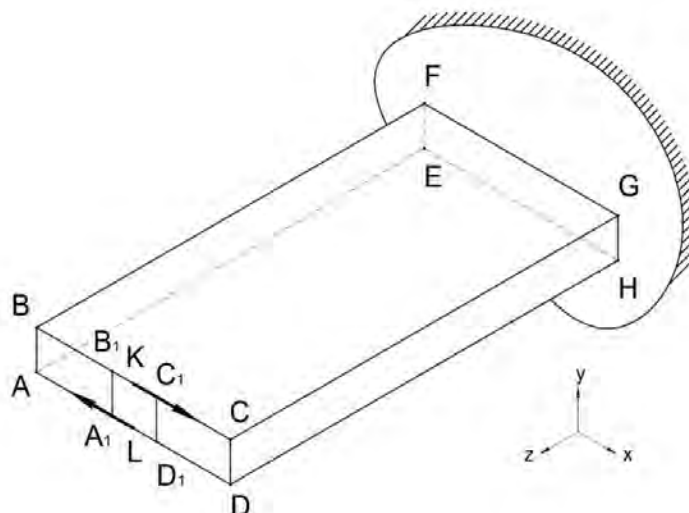


Рисунок 7 – Пространственная проектная задача

Нагрузка считается приложенной в виде пары сил в точках K и L. Закрепление конструкции возможно на площадке EFGH. Эта задача моделирует с определёнными упрощениями проектирование неподвижной части крыла самолёта с изменяемой стреловидностью. На ри-

сунке 8 штриховкой выделена та часть крыла, в которой можно разместить силовую конструкцию. Вопрос в том, какой она должна быть?

В качестве простых решений задачи могут быть предложены интуитивно два варианта конструкций: а) круговая замкнутая цилиндрическая оболочка с поперечным сечением, вписанным в квадрат $A_1B_1C_1D_1$ и б) цилиндрическая оболочка с тем же прямоугольным поперечным сечением.

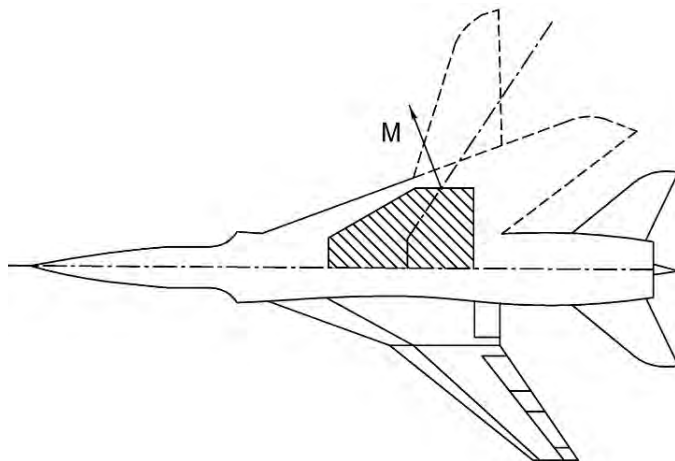


Рисунок 8 – Фрагмент силовой конструкции крыла с изменяемой стреловидностью

При расчёте касательных напряжений в этих оболочках по формуле Бредта и эквивалентных напряжений по Мизесу $\sigma_{eqv} = \tau\sqrt{3}$ получается одинаковая (!) величина силового фактора оболочек $G = 3,46 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}$ для вариантов (а) и (б). Крутящий момент M в виде пары сил $P=M/KL$ может быть передан на круговую оболочку с помощью кольца диаметром $d=KL$, материал которого работает с переменными усилиями в одноосном состоянии. Дополнительный силовой фактор кольца в задаче имеет величину $\Delta G = \frac{1}{4} M \cdot \pi = 0,079 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

В итоге силовой фактор конструкции в виде цилиндрической оболочки с кольцом (шпангоутом) на свободном торце составляет $G_{крызг} = 3,54 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

Соответственно крутящий момент в виде пары сил может быть передан на квадратную тонкостенную оболочку с помощью торцевой стенки и пары стержней B_1C_1 и A_1D_1 с дополнительным силовым фактором $\Delta G = 0,137 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}$. Силовой фактор квадратной конструкции с зашивкой на свободном торце составляет $G_{кв} = 3,60 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

Таким образом, при одинаковых габаритах конструкция с квадратным сечением неожиданно оказывается несколько менее эффективной, чем круговая, несмотря на большую «световую площадь». Разница составляет менее 2%, и поэтому имеет только теоретический интерес.

Аналогичные расчёты тонкостенных конструкций с прямоугольными поперечными сечениями с соотношениями «ширины к высоте» $B_1C_1/CD = 2/1$ и $BC/CD = 5/1$ дают величины силового фактора конструкций соответственно $G_{2/1} = 2,79 \cdot 10^9$ и $G_{5/1} = 2,41 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

Эти результаты также представляются несколько неожиданными – увеличение «световой площади» прямоугольных поперечных сечений в 2 и 5 раз даёт уменьшение силового фактора по сравнению с круговой и квадратной конструкцией только на 22,5% и 33% соответственно. В подобных ситуациях перебора вариантов конструкций представляет интерес знание предела совершенства – идеального решения.

С этой целью рассмотрим решение обсуждаемой модельной задачи с использованием алгоритма топологической оптимизации (раздел 3, пункты алгоритма 1-14). В качестве исходных данных использовались следующие характеристики конструкционного материала: плотность $\rho=2,8 \text{ г/см}^3$, модуль упругости $E=70000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$, допускаемое напряжение $[\sigma]=300 \text{ МПа}$. Эквивалентные напряжения вычислялись по критерию Мизеса. Расчёты НДС выполнялись в системе ANSYS с использованием кубических элементов Solid-65 с размером ребра $0,1CD$. Узлы на плоскости EFGH считались закреплёнными по трём степеням свободы.

На рисунке 9 показано равнопрочное в смысле (20) распределение материала в конструкции. Эти картины отчётливо показывают, как крутящий момент в виде пары сил на первых 10% оси Z конструкции трансформируется через массивную часть в полую конструкцию переменного (увеличивающегося) сечения. Начиная примерно с 80% оси Z, передача крутящего момента в оптимальной конструкции постепенно перестраивается в бимоментную структуру у заделки.

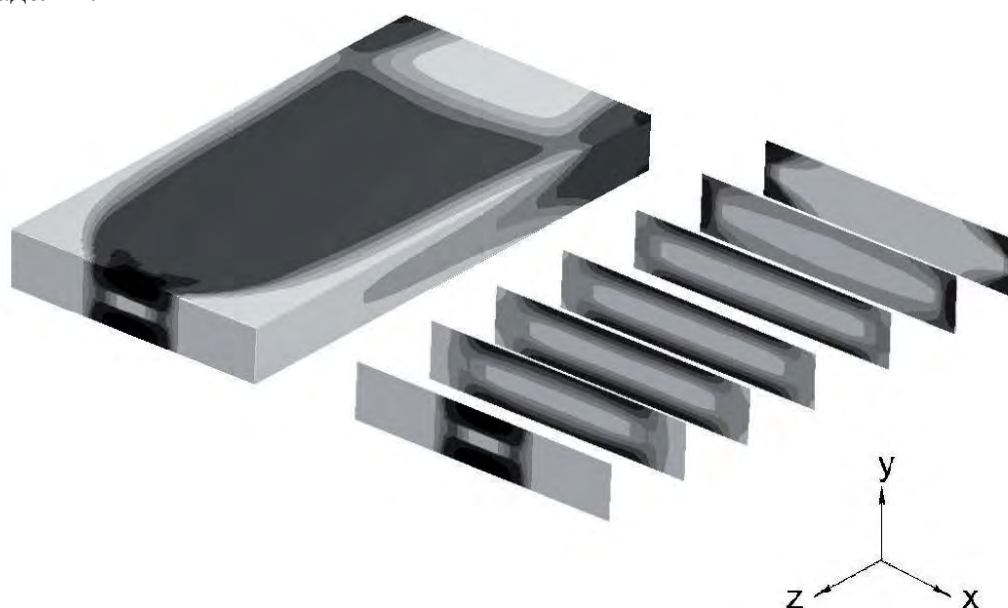


Рисунок 9 – Оптимальное распределение материала

В качестве начального распределения плотностей принималась постоянная величина во всех элементах. На рисунках 10, 11, и 12 показано по итерациям j : изменение силового фактора G ; массы условно-равнопрочной конструкции m_j и массы потребной по прочности m_j^* ; минимального коэффициента избытка прочности η_{jmin} .

Потребность в довольно большом числе итераций объясняется «сильной» статической неопределимостью ТПП, представленного набором элементов. Изменение плотности и связанного с ней модуля упругости каждого элемента вызывает изменение распределения напряжений во всех остальных.

Величина силового фактора в полученной идеальной конструкции меньше, чем во всех рассмотренных интуитивно-рациональных конструкциях, таблица 1. Это означает её превосходство по способу передачи усилий.

Таблица 1 – Величины силового фактора

$G_{\text{квадрат}}, \text{ Н} \cdot \text{ мм}$	$G_{\text{круг}}, \text{ Н} \cdot \text{ мм}$	$G_{\text{прямоуг.2/1}}, \text{ Н} \cdot \text{ мм}$	$G_{\text{прямоуг.5/1}}, \text{ Н} \cdot \text{ мм}$	$G_{\text{opt}}, \text{ Н} \cdot \text{ мм}$
$3,60 \cdot 10^9$	$3,54 \cdot 10^9$	$2,79 \cdot 10^9$	$2,41 \cdot 10^9$	$2,29 \cdot 10^9$

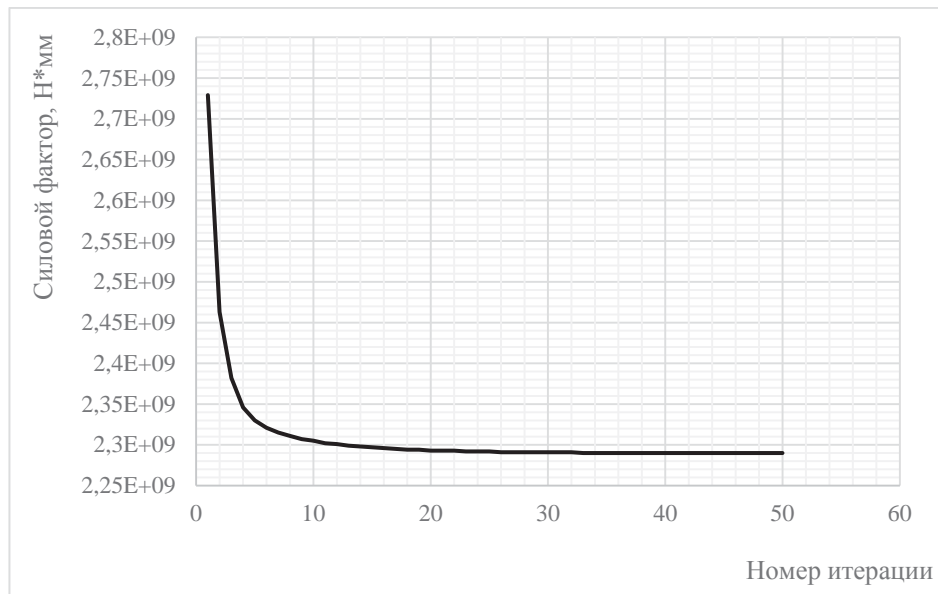


Рисунок 11 – Изменение силового фактора в процессе оптимизации

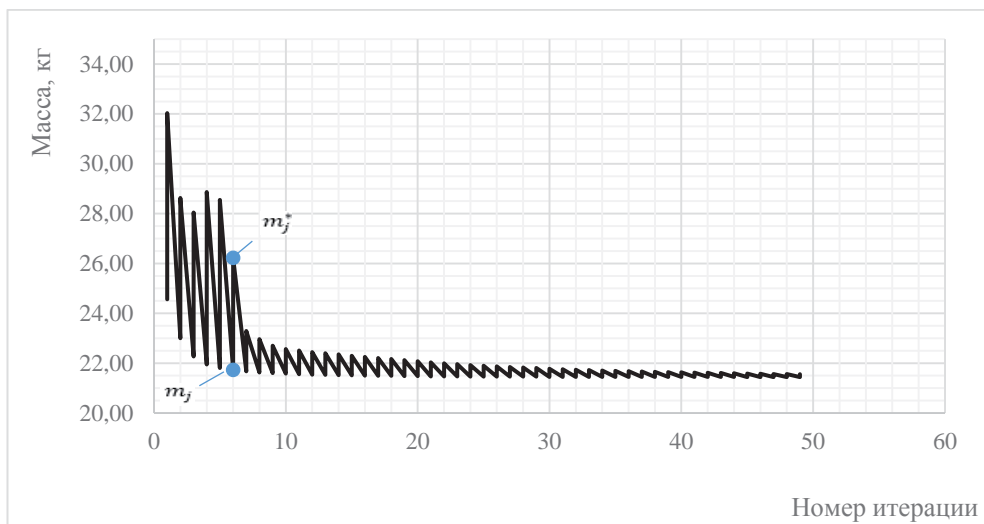


Рисунок 12 – Изменение масс в процессе оптимизации

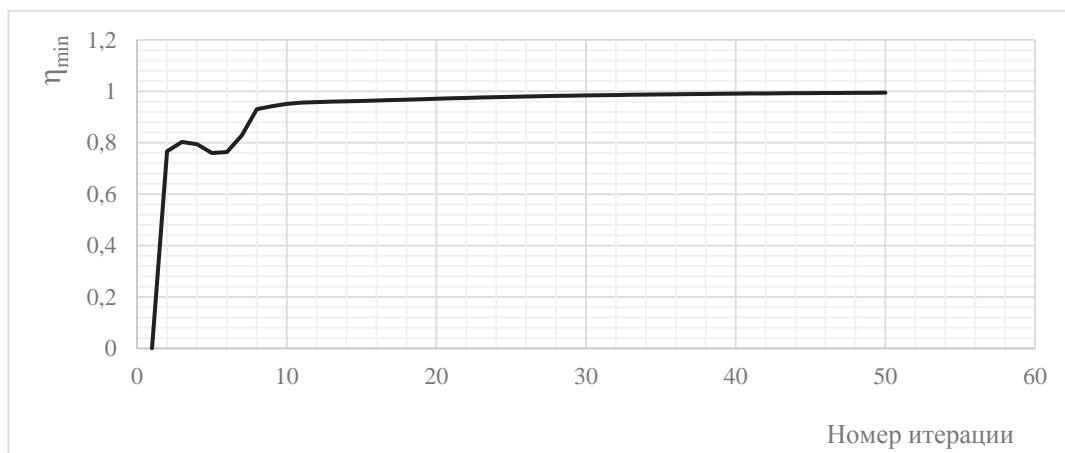


Рисунок 13 – Изменение минимального коэффициента избытка прочности в процессе оптимизации

Заключение

Рассмотренный алгоритм проектирования и примеры показывают, что оптимизационная модель в виде ТПП позволяет решать две самостоятельные задачи. Во-первых, получать количественную оценку предела совершенства конструкции с точки зрения минимизации её массы. Во-вторых, показать её рациональную силовую схему.

Пример с трёхмерной конструкцией показывает насколько перспективна разработка аддитивных технологий, которые позволяли бы создавать изотропные и анизотропные материалы переменной плотности в широком диапазоне её значений. На микроуровне это могли бы быть рациональные стержневые или ячеистые структуры с возможностями задавать поперечные сечения стержней и толщины ячеек. Заметим, что примерно так устроены такие совершенные конструкции, как кости животных, особенно птиц.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования Российской Федерации в рамках реализации программы повышения конкурентоспособности Самарского университета среди ведущих образовательных и научных центров на 2013-2020 годы.

Автор благодарит А.А. Павлова и С.А. Павлову за подготовку иллюстративных материалов.

Список источников

- [1] *Лычев, С.А.* Моделирование аддитивных технологий: геометрический подход / С.А. Лычев, А.В. Манжиров, Е.В. Мурашкин // Сборник докладов II Международной конференции «Аддитивные технологии: настоящее и будущее» Москва, 16 марта 2016 г., ВИАМ. - 2016. - С.18.
- [2] *Промахов, В.В.* О возможности получения аддитивных керамических структур с использованием метода послыного наплавления. / В.В. Промахов, И.А. Жуков, С.А. Ворожцов, М.В. Шевченко, Б.Г. Третьяков, А.С. Жуков, А.Б. Ворожцов // Сборник докладов II Международной конференции «Аддитивные технологии: настоящее и будущее» Москва, 16 марта 2016 г., ВИАМ. - 2016. - С.12.
- [3] *Тарасова, Т.В.* Возможности технологий аддитивного производства для изготовления машиностроительной продукции различного назначения / Т.В. Тарасова, А.А. Филатова // Сборник докладов II Международной конференции «Аддитивные технологии: настоящее и будущее» Москва, 16 марта 2016 г., ВИАМ. - 2016. - С.32.
- [4] *Горбовец, М.А.* Усталостные свойства жаропрочных материалов, полученных методом SLM. / М.А. Горбовец, А.Г. Евгенов, И.А. Ходинев, М.И. Лукьянова // Сборник докладов II Международной конференции «Аддитивные технологии: настоящее и будущее» Москва, 16 марта 2016 г., ВИАМ. - 2016. - С.8.
- [5] *Машиностроение. Энциклопедия. Том IV-21. Самолеты и вертолеты. Книга 2. Проектирование, конструкции и системы самолетов и вертолетов. Под общей редакцией А.М. Матвеевко - М.: Машиностроение, 2004. - 592 с.*
- [6] *Разани, Р.* Поведение равнопрочной конструкции и её отношение к конструкции минимального веса / Р. Разани // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – Том 3. - №12. – С.35-39.
- [7] *Комаров, А.А.* Основы проектирования силовых конструкций / А.А. Комаров. - Куйбышевское книжное издательство, 1965. – 88 с.
- [8] *Комаров, В.А.* Проектирование силовых схем авиационных конструкций / В.А. Комаров // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. – М.: Машиностроение, 1984. – с. 114-129.
- [9] *Комаров, В.А.* Точное проектирование / В.А. Комаров // Онтология проектирования. №3(5), 2012. – с.8-23.
- [10] *Комаров, V.A.* Aircraft design using variable density model / V.A. Komarov, A.V. Boldyrev, A.S. Kuznetsov, M.Yu. Lapteva // Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vo. 84, No. 3, 2012, pp. 162-171.
- [11] *Vasiliev V.V.* Optimal Design: Theory and Applications to Materials and Structures / V.V. Vasiliev, Z. Gurdal // CRC Press, 1999. – 320 p.
- [12] *Комаров, В.А.* Весовой анализ авиационных конструкций: теоретические основы / В.А. Комаров // Общероссийский научно-технический журнал «Полет», 2000 (№1). – С.31-39.

- [13] **Bendsoe, M.P.** Topology Optimization: Theory, Methods and Applications / M.P. Bendsoe, O. Sigmund. – New York: Springer, 2003.– 271 p
- [14] **Bendsoe, M.P.** Material interpolation schemes in topology optimization / M.P. Bendsoe, O. Sigmund // Archive of Applied Mechanics. – 1999. – Volume 69, Issue 9-10, p. 635-654.

THEORETICAL BASIS FOR DESIGN OF LOAD-BEARING STRUCTURES PRODUCED USING ADDITIVE TECHNOLOGIES

V.A. Komarov

Samara National Research University named after academician S.P. Korolev, Samara, Russia
vkomarov@ssau.ru

Abstract

The article discusses interconnections and mutual influence between the triad of the basic engineering concepts – material, technology and structure. The possibilities for development of load-bearing structures, produced using additive technologies are analyzed. The task of optimal material distribution within a body of variable density is formulated and solved. An algorithm for topologic optimization of load-bearing structures, produced from a material of variable density, based on the criteria of minimal mass is proposed. General mechanical properties of the hypothetical material are assumed to be proportional to its density. The limitations of strength and rigidity are considered for single and multiple loading cases. The content of the concepts "optimal" and "rational" structure is discussed and refined. The "force factor" objective criterion, which takes into account the magnitude and extent of the action of internal forces, is proposed as a measure of comparison of the weight perfection of various designs and to estimate the design proximity to a theoretically optimal solution. The article presents examples of two and three dimensional structures. Future goals are formulated to develop new materials and methods for creating structures with variable density as one of the possible directions for the further development of additive technologies.

Key words: *additive technologies, design, structure, strength, stiffness, material, optimization, the body of variable density.*

Citation: Komarov VA. Theoretical basis for design of load-bearing structures produced using additive technologies. *Ontology of designing*, 2017; 7(2): 191-206. DOI: 10.18287/2223-9537-2017-7-2-191-206.

Acknowledgment

The work was carried out with the support of the Russian Ministry of Science and Education under the realization of the programme of increase of the competitiveness of the Samara University amongst the leading educational and scientific centers for 2013-2020. The author thanks AA. Pavlova and S.A. Pavlov for preparing illustrative materials.

References

- [1] **Lychev SA, Manzhurov AV, Murashkin EV.** Modeling of additive technologies: geometric approach [In Russian]. Proceedings of the II International Conference "Additive Technologies: Present and Future" Moscow, March 16, 2016, VIAM. 2016. – p.18
- [2] **Promakhov VV, Zhukov IA, Vorozhtsov SA, Shevchenko MV, Tretyakov BG, Zhukov AS, Vorozhtsov AB.** On the possibility of obtaining additive ceramic structures using the layer-by-layer melting technique [In Russian]. Proceedings of the II International Conference "Additive Technologies: Present and Future" Moscow, March 16, 2016, VIAM. 2016. – p.12
- [3] **Tarasova TV, Filatova AA** Possibilities of additive production technologies for the manufacture of machine-building products for various purposes [In Russian]. Proceedings of the II International Conference "Additive Technologies: Present and Future" Moscow, March 16, 2016, VIAM. 2016. – p.32.
- [4] **Gorbovets MA, Evgenov AG, Khodinev IA, Lukyanova MI.** Fatigue properties of high-temperature materials obtained by the SLM method [In Russian]. Proceedings of the II International Conference "Additive Technologies: Present and Future" Moscow, March 16, 2016, VIAM. 2016. – p.8.

- [5] Mechanical engineering. Encyclopedia. Volume IV-21. Aircraft and helicopters. Book 2. Design, construction and systems of aircraft and helicopters. General edition A.M. Matveenko - Moscow: Mechanical Engineering, 2004. - 592 p.
 - [6] **Razani R.** Behavior of Fully-stressed Structures and Its Relation to the Design of Minimal Weight structure [In Russian]. Rocket Technology and Astronautics. - 1965. - Volume 3. - № 12. - p.35-39.
 - [7] **Komarov AA.** Fundamentals of load-bearing structures design [In Russian]. Kuibyshev book publishing house, 1965. - 88 p.
 - [8] **Komarov VA.** Design of aircraft load-bearing structures [In Russian]. Actual problems of aviation science and technology. - M.: Mechanical Engineering, 1984. - p. 114-129.
 - [9] **Komarov VA.** Concurrent Design [In Russian]. Ontology of Designing. 2012; 3(5): 8-23.
 - [10] **Komarov VA, Boldyrev AV, Kuznetsov AS, Lapteva MYu.** Aircraft design using variable density model, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vo. 84, No. 3, 2012, pp. 162-171.
 - [11] **Vasiliev VV, Gurdal Z.** Optimal Design: Theory and Applications to Materials and Structures. CRC Press, 1999. – 320 p.
 - [12] **Komarov VA.** Weight Analysis of Aviation Structures: Theoretical Foundations [In Russian]. All-Russian Scientific and Technical Journal "Polet", 2000 (№1). - p.31-39.
 - [13] **Bendsoe MP, Sigmund O.** Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. - New York: Springer, 2003.– 271 p
 - [14] **Bendsoe MP, Sigmund O.** Material interpolation schemes in topology optimization. Archive of Applied Mechanics. – 1999. – Volume 69, Issue 9-10, p. 635-654.
-

Сведения об авторе



Комаров Валерий Андреевич, 1941 г. рождения. Окончил Куйбышевский авиационный институт в 1964 году, доктор технических наук (1976), профессор (1978), заведующий кафедрой конструкции и проектирования летательных аппаратов Самарского университета, член Российской академии инженерных наук и постоянный участник Европейского семинара в области обучения проектированию авиационных конструкций (EWADE). Является автором более 250 научных работ, в том числе 5 книг. Область научных интересов - механика, теория и практика проектирования самолетов.

Valeriy A. Komarov (b. 1941). He graduated from Kuibyshev Aviation Institute in 1964, received his Doctor of Technical Sciences Degree in 1976, Full Professor Degree in 1978. He is Head of Aircraft Design Department at Samara University, Member of Russian Academy of Engineering Sciences and regular participant of the European Workshop on Aircraft Design

Education (EWADE). He is the author of over 250 scientific papers including 5 books. His research interest is mechanics, theory and practice of aircraft structural design.