УДК 62-40

АЛЬТЕРНАНСНЫЙ МЕТОД В ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Э.Я. Рапопорт[1], Ю.Э.Плешивцева[2]

Институт проблем управления сложными системами РАН, Самара, Россия
[1]edgar.rapoport@mail.ru, [2]yulia_pl@mail.ru

Аннотация

Предлагаются конструктивные способы решения широкого круга векторных задач оптимального управления системами с распределёнными параметрами (СРП) в условиях заданной точности равномерного приближения к требуемому конечному состоянию объекта на множестве пространственных аргументов управляемой величины. Задачи многокритериальной оптимизации после перехода к относительным равнозначным оценкам частных критериев эффективности приводятся к однокритериальной версии в форме вариационной задачи с интегральным функционалом качества и новыми ограничениями на финишные значения дополнительных фазовых переменных расширенной модели СРП. Комбинированные ограничения на конечное состояние СРП заменяются одним ограничением на их линейную комбинацию, которое предъявляется в равномерной метрике на расширенном множестве аргументов, включающем кроме пространственных переменных изменяющиеся в пределах типового симплекса весовые множители суммируемых компонентов. Задачи многоканального управления одним или системой взаимосвязанных распределённых объектов рассматриваются в условиях специфического требования одинаковой продолжительности процесса управления для всех управляющих воздействий, которое приводит к необходимости их выбора на множестве различных априори допустимых вариантов с последующей оценкой по величине оптимизируемого показателя качества. Дальнейшие процедуры предварительной параметризации управляющих воздействий, осуществляемые с помощью известных аналитических условий оптимальности, обеспечивают точную редукцию исходных постановок к усложнённым модификациям задач полубесконечного программирования, на которые распространяются вычислительные алгоритмы для скалярного варианта альтернансного метода поиска искомых экстремалей, базирующегося на их чебышёвских свойствах. Приводится представляющий самостоятельный интерес пример решения векторной задачи оптимального управления объектом технологической теплофизики.

Ключевые слова: *системы с распределёнными параметрами, оптимальное управление, многокритериальная оптимизация, комбинированные ограничения, многоканальные управляющие воздействия.*

Цитирование: *Рапопорт, Э.Я.* Альтернансный метод в векторных задачах параметрической оптимизации систем с распределёнными параметрами / Э.Я. Рапопорт, Ю.Э. Плешивцева // Онтология проектирования. – 2018. – Т. 8, №4(30). - С.615-627. – DOI: 10.18287/2223-9537-2018-8-4-615-627.

Введение

В ряде актуальных для приложений ситуаций возникают трактуемые с позиций системного подхода новые, существенно отличающиеся от традиционных постановки задач оптимального управления (ЗОУ) системами с распределёнными параметрами (СРП) в усложнённых условиях векторной формы предъявляемых требований к критериям эффективности, учитываемым ограничениям и выбору управляющих воздействий. Трудности отыскания алгоритмов оптимизации в векторной задаче оптимального управления (ВЗОУ) значительно возрастают по сравнению с их известными скалярными частными случаями. В настоящей работе предлагаются конструктивные методы решения подобных ВЗОУ СРП применительно к типичным для приложений оценкам в равномерной метрике точности приближения конечных состояний СРП к требуемым.

Развиваемый подход базируется на процедуре предварительной параметризации искомых управляющих воздействий с помощью известных условий оптимальности и последующей редукции исходной задачи к специальным модификациям задачи математического программирования с бесконечным числом ограничений (задача полубесконечной оптимизации - ЗПО), разрешаемым альтернансным методом, являющимся развитием теории нелинейных чебышёвских приближений применительно к рассматриваемому кругу ЗПО [1, 2].

1 Модели и методы многокритериальной оптимизации СРП

Оценка эффективности функционирования сложных управляемых систем как правило производится в приложениях по различным показателям качества, чаще всего конфликтующих друг с другом, что приводит к задаче выбора возможных альтернатив для управляющих воздействий в условиях неопределённости целей процесса управления (многокритериальная задача управления - МЗУ). Отбор приемлемых вариантов производится при этом среди эффективных решений (множество Парето), не улучшаемых ни по одному из критериев без ухудшения показателей по какому-либо из остальных.

Традиционные способы редукции исходной МЗУ к однокритериальной свёртке компонентов векторной целевой функции с заданными весовыми коэффициентами приводят к построению множества Парето путём перебора всех допустимых значений таких коэффициентов, вследствие чего возникает самостоятельная проблема оптимального выбора в пределах этого множества единственной альтернативы в условиях значительного числа возможных вариантов [3-6].

Переход путём соответствующей процедуры нормирования к относительным равнозначным оценкам всех составляющих векторного критерия с последующим использованием их минимаксной (или максиминной) свёртки с единичными весовыми коэффициентами позволяет непосредственно получить парето-эффективное решение многокритериальной задачи, которая в итоге сводится после параметризации искомых управляющих воздействий к специальной задаче математического программирования (ЗМП) с учётом всех изначально заданных ограничений [4, 5].

Применительно к СРП формулируемая в итоге ЗМП принципиально усложняется и принимает вид ЗПО с бесконечным числом ограничений в типичных условиях их оценки в равномерной метрике [1, 2].

Для СРП с управляемой функцией состояния $Q(X,t)$, описываемой в пределах односвязной m-мерной пространственной области $V \ni X$, $1 \le m \le 3$, с кусочно-гладкой границей S линейным неоднородным уравнением в частных производных параболического типа с типовыми краевыми условиями и внутренними $u_V(t)$ или граничными $u_S(t)$ сосредоточенными управляющими воздействиями, МЗУ формулируется в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&I_\Sigma \to \min_{u \in \Omega_\Sigma};\\
&I_\Sigma = (I_p(u)),\ p = \overline{1,q};\ u \in \{u_V(t), u_S(t)\};\\
&\Omega_\Sigma = \{u : \Phi_\Sigma(u) \le \varepsilon_0;\ u \in [u_{\min}, u_{\max}]\};\\
&\Phi_\Sigma(u) = \max_{X \in V} \left| Q(X,t^*) - Q^{**} \right|.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $I_p(u)$ - частные критерии оптимальности, заданные в типовой форме интегральных функционалов качества, общее число которых равно $q>1$; ε_0 - заданная точность равномерного приближения состояния $Q(X,t^*)$ СРП в конечный момент времени $t=t^*$ к требуемому $Q^{**}(X)=Q^{**}=\text{const}$, и $Q(X,t)$ представляется в форме разложения в сходящийся в среднем ряд по собственным функциям $\varphi_n(X)$ начально-краевой задачи модели СРП $Q(X,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{Q}_n(t)\varphi_n(X)$ с коэффициентами (временными модами) $\overline{Q}_n(t)$, поведение которых моделируется бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, фигурирующей в качестве модального описания СРП в предлагаемых далее процедурах решения МЗУ [7].

Переход от I_p к относительным равнозначным оценкам $\lambda_p(u)$ приводит к минимаксной свертке МЗУ (1) [4]:

(2) $$\lambda(u)=\max_{p\in\{1,q\}}\lambda_p(u)\to\min_{u\in\Omega_\Sigma};\quad \lambda_p(u)=\frac{I_p(u)-I_p^*}{I_p^0-I_p^*};\ 0\le\lambda_p(u)\le 1,\ p=\overline{1,q},$$

точка оптимума которой u^* заведомо принадлежит множеству Парето исходной МЗУ и может рассматриваться в качестве искомого решения задачи (1) [4]. Здесь I_p^* и I_p^0 - минимальная и «наихудшая» величины I_p соответственно в условиях заданных ограничений.

Минимаксная задача (2) эквивалентна обычной однокритериальной задаче

(3) $$I=\frac{1}{t^*}\int_0^{t^*}\lambda^0 dt=\lambda^0\to\min_{u\in\Omega_\Sigma};\ \frac{d\lambda^0}{dt}=0;\ \lambda_p(u)=\frac{z_p(t^*)-I_p^*}{I_p^0-I_p^*}\le\lambda^0,\ \frac{dz_p}{dt}=f_{0p}(Q,u);\ p=\overline{1,q};$$

с интегральным функционалом качества (4), ограничениями на величину $\lambda_p(u)$, минимизируемым параметром λ^0 = **const**, модальным описанием СРП и дополнительными переменными $z_p(u)$, $p=\overline{1,q}$, вводимыми наряду с $\overline{Q}=(\overline{Q}_n)$, $n=1,2,\ldots$, где $f_{0p}(\overline{Q},u)$ - подынтегральные функции критериев $I_p(u)$.

Распространяемая на такую задачу стандартная процедура принципа максимума Понтрягина, как правило, позволяет найти $u^*(t)$ в форме явной зависимости $u^{**}(\overline{Q}^*(t),\overline{\Psi}^*(t))$ от соответствующих оптимальному процессу векторов $\overline{Q}^*$ и $\overline{\Psi}^*$ модальных составляющих $Q(X,t)$ и сопряжённых переменных $\overline{\Psi}(t)$ независимо от ограничений на $Q(X,t^*)$ и $z_p(t^*)$ в (1) и (3) [2].

Полученные указанным образом зависимости $u^*(\overline{Q}^*,\overline{\Psi}^*)$ во многих случаях непосредственно устанавливают структуру искомых оптимальных алгоритмов $u^*(t)$ в форме их параметрического описания с точностью до вектора $\Delta^{(N)}=(\Delta_i^{(N)})$, $i=\overline{1,N}$, упорядоченной последовательности конечного числа N параметров $\Delta_1^{(N)},\Delta_2^{(N)},\ldots,\Delta_N^{(N)}$, непосредственно характеризующих поведение управления $u^*(t)$ в области его определения [1, 2].

Интегрирование уравнений объекта с параметризованным управлением $u(\Delta^{(N)},t)$ приводит в таких случаях к представлению I_p, λ_p и конечного состояния $Q(X,t^*)$ в виде явных достаточно гладких зависимостей, соответственно, $I_p(\Delta^{(N)})$, $\lambda_p(\Delta^{(N)})$ и $Q(X,\Delta^{(N)})$ от $\Delta^{(N)}$, если считать известными значения I_p^* и I_p^0 в (2).

Размерность N вектора $\Delta^{(N)}$ устанавливается по известным правилам в зависимости от значения ε_0 в (1), либо априори фиксируется возможностями технической реализации $\Delta^{(N)}$-параметризуемых управляющих воздействий [1, 2].

В результате производится точная редукция задачи (3) к ЗПО

(4) $$I=\lambda^0(\Delta^{(N)})\to\min_{\Delta^{(N)}};$$

(5) $$\Phi_\Sigma(\Delta^{(N)})=\max_{X\in V}\left|Q(X,\Delta^{(N)})-Q^{**}\right|\le\varepsilon_0,$$

(6) $$\lambda_p(\Delta^{(N)})=\frac{I_p(\Delta^{(N)})-I_p^*}{I_p^0-I_p^*}\le\lambda^0,\ p=\overline{1,q}$$

на минимум целевой функции (4) конечного числа N переменных $\Delta_i^{(n)}$, $i=\overline{1,N}$, с бесконечным числом ограничений на величину $Q(X,\Delta^{(N)})$ для всех $X\in V$, которая отличается от её стандартной формулировки в задачах с одним критерием оптимальности [1,2] дополнительными ограничениями (6) на величину λ_p.

Рассматривая вместо (4) критерий оптимальности

(7) $$I_{p_1}=\lambda_{p_1}(\Delta^{(N)})\to\min_{\Delta^{(N)}}$$

последовательно для всех $p_1=\overline{1,q}$, получим ряд ЗПО (5), (7), рассмотренного в [1, 2] типового вида, на решениях которых $\Delta^{(N)}=\Delta^{[p_1]}$, определяемых по схеме альтернансного метода, вычисляются $\lambda_p(\Delta^{[p_1]})\,\forall\ p=\overline{1,q}$. За решение $\overline{\Delta}^{(N)}$ исходной задачи (4)-(6) принимается $\Delta^{[p_1^*]}$ при таких $p_1=p_1^*$, для которых выполняются неравенства $\lambda_p(\Delta^{[p_1^*]})\le\lambda_{p_1^*}(\Delta^{[p_1^*]})$ для всех $p=\overline{1,q}$.

Это решение обладает альтернансными свойствами [1, 2], порождающими замкнутую относительно всех искомых параметров оптимального процесса систему равенств (8) в некоторых R точках $X_j^0\in V$.

(8) $$\left|Q(X_j^0,\overline{\Delta}^{(N)})-Q^{**}\right|=\varepsilon_0,\quad \frac{\partial}{\partial X}Q(X_{jv}^0,\overline{\Delta}^{(N)})=0;\ X_{jv}^0\in\mathbf{int}V,\ j=\overline{1,R};\ v=\overline{1,R_1};\ R_1\le R;$$
$$R=\begin{cases}N,\ \varepsilon_0>\min\varepsilon(\Delta^{(N)});\\ N+1,\ \varepsilon_0=\min\varepsilon(\Delta^{(N)});\end{cases}$$
$$\min\varepsilon(\Delta^{(N)})=\min_{\Delta^{(N)}}\left[\max_{X\in V}\left|Q(X,\Delta^{(N)})-Q^{**}\right|\right].$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о конфигурации зависимостей $Q(X,\overline{\Delta}^{(N)})$ на $V\ni X$, позволяющей идентифицировать значения X_j^0 и знаки разностей $Q(X_j^0,\overline{\Delta}^{(N)})-Q^{**}$, соотношения (8) трансформируются к системе $R+R_1$ уравнений относительно $R+R_1$ неизвестных значений $\overline{\Delta}_i^{(N)}, i=\overline{1,N};\ \min\varepsilon(\Delta^{(N)})$, если $\varepsilon_0=\min\varepsilon(\Delta^{(N)})$ и координат $X_{j\nu}^0, \nu = \overline{1, R_1}$, точек $X_{j\nu}^0 \in \{X_j^0\}$, решение которой находится известными численными методами и исчерпывает решение исходной задачи МЗУ.

На этом этапе принципиальную роль играют нестандартные процедуры использования в целях получения указанной информации фундаментальных физических характеристик конкретных оптимизируемых процессов, предварительное исследование которых представляет собой отдельную достаточно сложную задачу.

Величины I_p^* в (2) находятся решением по схеме альтернансного метода частных однокритериальных задач оптимизации с заданными ограничениями вида (1) на точность ε_{0p} приближения $Q_p(X, t^*)$ к Q^{**} в условиях $\varepsilon_0 \le \varepsilon_{0p}$, $p = \overline{1, q}$.

Значения I_p^0 могут быть формально определены решениями «обратных» задач на $\mathbf{max} I_p$ или установлены, исходя из физических соображений.

По найденному указанным способом вектору $\overline{\Delta}^{(N)}$ и известным зависимостям $\lambda_p(\overline{\Delta}^{(N)})$ вычисляется минимальное значение $\lambda_{\min}^0$ целевой функции в (4)

(9) $$\lambda_{\min}^0 = \min_{\Delta^{(N)}} \lambda^0(\Delta^{(N)}) = \lambda^0(\overline{\Delta}^{(N)}) = \max_{p \in \{1, q\}} \lambda_p(\overline{\Delta}^{(N)}),$$

«автоматически» обеспечивая тем самым выполнение требований к $\lambda_p(\Delta^{(N)})$ в (4).

Исходная ЗПО значительно упрощается как раз в наиболее характерной для приложений ситуации с минимально достижимой величиной $\varepsilon_0 = \mathbf{min}\, \varepsilon(\Delta^{(N)})$ в классе $\Delta^{(N)}$- параметризуемых управлений и сводится в таком случае к задаче достижения этой величины без дополнительных ограничений [1, 2].

Самостоятельный интерес представляют МЗУ СРП в характерных условиях интервальной неопределённости начальных состояний и неизменных во времени параметрических характеристик объекта управления [8]. Подобные МЗУ сводятся по описанной схеме к разрешаемой альтернансным методом ЗПО, отличающейся от детерминированного варианта, во-первых, оценкой точности ε_0 равномерного приближения конечного состояния СРП к требуемому на расширенном множестве аргументов, включающем кроме пространственных переменных все возможные реализации неопределённых факторов, и, во-вторых, определением частных критериев оптимальности в форме функций максимума на допустимом множестве изменения учитываемых неопределённых величин.

2 Параметрическая оптимизация СРП в задачах с комбинированными требованиями к конечным состояниям объекта

Наряду с ЗОУ, рассматриваемыми в обычных условиях единственного требования к $\Phi_\Sigma(u)$ вида (1), значительный теоретический и практический интерес представляет их расширенная постановка с одновременно предъявляемыми различными ограничениями на оцениваемые в равномерной метрике конечные состояния объекта, отличающимися друг от друга формами их функционального представления $F(Q(X, t^*))$, видами эталонных распределений по пространственным координатам $Q_k^{**}(X)$ и допустимой точностью ε_k приближения $Q(X, t^*)$ к $Q_k^{**}(X)$:

(10) $$\Phi_k(u) = \max_{X \in V} \left| F_k(Q(X, t^*)) - Q_k^{**}(X) \right| \le \varepsilon_k, \; k = \overline{1, w}; \; w > 1.$$

Подобные ЗОУ СРП возникают, в частности, применительно к техническим объектам с распределёнными параметрами, функционирующим в составе технологических комплексов, взаимосвязи между элементами которых диктуют необходимость перехода к векторному варианту (10).

Так, например, в ЗОУ температурными режимами предварительного нагрева металлических полуфабрикатов в технологических комплексах обработки давлением [9-11] вместе с требованиями к точности равномерного приближения $Q(X,t^*)$ к Q^{**} в (1) во многих случаях следует с позиций системного подхода учитывать ограничение на ошибку отклонения $Q(X,t^*)$ от желаемого стационарного состояния объекта [12] на возможном этапе термостатирования перед передачей обрабатываемых изделий к деформирующему оборудованию или(и) дополнительное ограничение на погрешность приближения средней на каждом элементе пространственной области температуры к её заданной величине, обеспечивающей минимальное энергопотребление на стадии пластического формоизменения [9, 10].

В однокритериальном варианте с $q=1$ в (1) ЗОУ СРП с комбинированными ограничениями (10) редуцируется после параметризации искомых управлений подобно (4), (5) к ЗПО следующего вида

(11) $$I\left(\Delta^{(N)}\right)\to \min_{\Delta^{(N)}};$$

(12) $$\Phi_k\left(\Delta^{(N)}\right)=\max_{X\in V}\left|F_k\left(Q(X,\Delta^{(N)})\right)-Q_k^{**}(X)\right|\le \varepsilon_k;\; k=\overline{1,w}; w>1,$$

где w требований (12) непосредственно сводятся к единственной оценке дискретной функции максимума по составляющим Φ_k в (9), нормируемых с учётом отличающихся значений ε_k.

Дальнейший переход к одному эквивалентному ограничению в типовой форме оценки непрерывной функции максимума базового варианта альтернансного метода обеспечивается линейной свёрткой всех компонентов дискретной функции максимума с ограниченной суммой весовых коэффициентов, играющих роль искомых переменных в соответствующей задаче линейного программирования (ЗЛП) на максимум этой свёртки. В итоге ЗОУ СРП с комбинированными ограничениями приводится к типовому виду ЗПО со специальной формой единственного ограничения на точность ε_0 равномерного приближения результирующего состояния объекта к требуемому, рассматриваемого на расширенном множестве аргументов, в число которых наряду с пространственными координатами входят искомые переменные ЗЛП $\bar{a}=(a_k)\in A_w,\, k=\overline{1,w}$, изменяющиеся в пределах типового симплекса $A_w=\{\bar{a}_k\ge 0, \sum_{k=1}^{w} a_k=1\}$ и заведомо являющиеся координатами вершин многогранника допустимых решений ЗЛП:

(13) $$I\left(\Delta^{(N)}\right)\to \min_{\Delta^{(N)}};\; \Phi_0(\Delta^{(N)})=\max_{y\in V_1}\sum_{k=1}^{w} a_k\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_k}\left|F_k\left(Q(X,\Delta^{(N)})\right)-Q_k^{**}(X)\right|\le \varepsilon_0,$$

где в качестве ε_0 может быть выбрана любая величина $\varepsilon_\eta, \eta\in\{\overline{1,w}\}$. Здесь $y=(X,\bar{a})$, $X\in V, V_1=V\times A_w$, $a_{k_j}=1,\; j=\overline{1,w_1}$ и заведомо при некоторых $k=k_j\in\{\overline{1,w}\}$ получаем $a_{k_j}=1,\; j=\overline{1,w_1};\, 1\le w_1\le w$, где $w_1\ge 1$ - число активных ограничений в (12).

Конструктивный вычислительный алгоритм решения задачи (13) по схеме альтернансного метода, усложняемый необходимостью предварительного выделения w_1 активных ограничений из общего их числа w в (12), приведён в [13].

3 Метод параметрической оптимизации в задачах многоканального управления системами с распределёнными параметрами

Целый ряд актуальных для приложений ЗОУ СРП формулируется в условиях одновременного воздействия на объект по различным каналам управления [14-16].

Самостоятельный достаточно общий класс задач подобного типа возникает для $\sigma > 1$ взаимосвязанных СРП [16-25] с использованием управляющих воздействий $U(t)$

(14) $$U(t) \in \{u_m(t) : u_m(t) \in \{u_{Vm}(t), u_{Sm}(t)\}; u_{m\min} \le u_m(t) \le u_{m\max};$$
$$u_{Vm}(t) = (u_{Vml}), l = \overline{1, l_{Vm}};\ u_{Sm}(t) = (u_{Sml}), l = \overline{1, l_{Sm}};\ m = \overline{1, \sigma};\ \sigma > 1\}$$

в виде совокупности различных для каждого m-го объекта $(m \in \{\overline{1, \sigma}\})$ векторных сосредоточенных внутренних $u_{Vm}(t)$ или граничных $u_{Sm}(t)$ управляющих воздействий с фиксированным характером их пространственного распределения, где для простоты исключается случай их совместного применения. Частный случай $\sigma > 1$ в (14) соответствует задаче векторного управления одним объектом.

С помощью аналитических условий оптимальности может быть получено подобно предыдущим задачам параметрическое представление каждой l-ой компоненты искомых управлений $u_m(t)$ в (14) с точностью до однозначно характеризующего управляющие воздействия $u_m(t)$ оптимальной структуры вектора $\Delta_l^{(m)} = (\Delta_{lk}^{(m)})$, $l = \overline{1, l_m}$; $l_m \in \{l_{Vm}, l_{Sm}\}$; $k = \overline{1, N_{lm}}$, определённым образом упорядоченной последовательности конечного числа N_{lm} параметров $\Delta_{lk}^{(m)}$, общее количество которых равно $N = \sum_{m=1}^{\sigma} \sum_{l=1}^{l_m} N_{lm}$.

В итоге, аналогично (11), (12) осуществляется редукция исходной ЗОУ к ЗПО следующего вида:

(15) $$I(\Delta^{\Sigma}) \to \min_{\Delta^{\Sigma}};\ \max_{X_m \in V_m} \left| Q_m(X_m, \Delta^{\Sigma}) - Q_m^{**}(X_m) \right| \le \varepsilon_m,\ m = \overline{1, \sigma},$$

где $\Delta^{\Sigma} = (\Delta_l^{(m)})$, $m = \overline{1, \sigma}$; $l = \overline{1, l_m}$ и ε_m- заданная точность равномерного приближения конечного состояния m-ой управляемой величины $Q_m(X_m, \Delta^{\Sigma})$ к требуемому $Q_m^{**}(X_m)$ в пространственной области V_m изменения пространственных координат X_m m-го объекта в системе взаимосвязанных СРП.

Решение задачи (15) может быть получено по схеме альтернансного метода, однако технология его применения существенно усложняется по сравнению с одноканальным управлением увеличенной размерностью вектора Δ^{Σ}, многовариантным набором правил выбора чисел N_{lm} в этих условиях; специфическим требованием одинаковой длительности процесса управления для всех компонентов управляющих воздействий, ограничивающим свободу их независимого друг от друга выбора, и необходимостью идентификации конфигураций оптимальных конечных пространственных распределений каждой из управляемых величин в условиях их зависимости от всех внешних воздействий.

4 Оптимальное управление объектом технологической теплофизики

В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу оптимального по быстродействию управления температурными режимами индукционного нагрева металлических заготовок перед последующей обработкой давлением с описанием температурного поля $Q(x,t)$ нагреваемой заготовки цилиндрической формы в зависимости от радиальной координаты x и времени t линейным одномерным неоднородным уравнением теплопроводности в относительных единицах с классическими краевыми условиями третьего рода и внутренним сосредоточенным управляющим воздействием по мощности электромагнитных источников тепла при заданных допустимых пределах её изменения [11].

К результирующему температурному состоянию $Q(x, t^*)$, достигаемому в конечный момент t^* процесса нагрева, одновременно предъявляются два требования вида (10): равномерного нагрева до заданной температуры Q^{**} = **const** с допустимой погрешностью ε_1 при $k = 1$, $F_1(Q(x,t^*)) = Q(x,t^*)$ в (10) и обеспечения допустимой точности ε_2 равномерного приближения средней величины $Q_c(x, t^*)$ разности $Q(x, t^*) - Q^{**}$ к нулю на любом отрезке [0, x], x ≤ 1, вдоль радиуса цилиндра при $k = 2$,

$$\left|F_2(Q(x,t^*)) - Q^{**}\right| = \left|Q_c(x,t^*)\right| = \left|\frac{2}{x^2}\int_0^x \left[Q(\eta,t^*) - Q^{**}\right]\eta\, d\eta\right| \tag{16}$$

в (10), исходя из типичных требований к средней температуре деформируемого изделия на всём протяжении последующих операций его пластического формоизменения [9, 10].

Процедура принципа максимума Понтрягина обеспечивает параметризованное представление оптимального по быстродействию управляющего воздействия с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_i^{(N)}),\ i = \overline{1,N}$, конечного числа N параметров $\Delta_1^{(N)}, \Delta_2^{(N)}, \ldots, \Delta_N^{(N)}$, в роли которых фигурируют длительности интервалов постоянства искомых управлений релейной формы, попеременно принимающих на отрезке $[0,t^*] \ni t$ только свои априори фиксируемые предельно допустимые значения [2]. Интегрирование уравнений объекта с параметризованным указанным образом управлением позволяет получить конечное распределение температур и значение критерия оптимальности $I = t^*$ в форме явных достаточно гладких зависимостей $Q(x,\Delta^{(N)})$, $I(\Delta^{(N)})$ от своих аргументов.

В результате производится точная редукция исходной задачи оптимального быстродействия к ЗПО вида (11), (12) на минимум функции $I(\Delta^{(N)})$ конечного числа переменных $\Delta_i^{(N)},\ i = \overline{1,N}$:

$$I(\Delta^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{(N)} \to \min_{\Delta^{(N)}}, \text{—} \tag{17}$$

с бесконечным числом ограничений, диктуемых требованиями вида (12) для всех $x \in [0,1]$:

$$\Phi_1(\Delta^{(N)}) = \max_{x\in[0,1]} \left|Q(x,\Delta^{(N)}) - Q^{**}\right| \le \varepsilon_1; \tag{18}$$

$$\Phi_2(\Delta^{(N)}) = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{2}{x^2}\int_0^x \left[Q(\eta,\Delta^{(N)}) - Q^{**}\right]\eta\, d\eta\right| \le \varepsilon_2. \tag{19}$$

Здесь критерий оптимальности I в (17), равный продолжительности процесса нагрева, представляется простой суммой длительностей $\Delta_i^{(N)}$ интервалов постоянства оптимального управления u_1^*.

Зависимость $Q(x,\Delta^{(N)})$ в (18), (19) определяется известным разложением в ряд по собственным функциям рассматриваемой начально-краевой задачи [11], а условия (18), (19) приводятся к единственному ограничению вида (13) при выборе $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$:

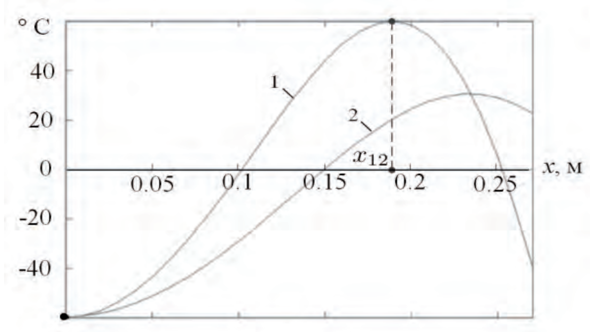
$$\Phi_0(\Delta^{(N)}) = \max_{y \in V_1} \left\{ a_1 \left| Q(x,\Delta^{(N)}) - Q^{**} \right| + a_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left| \frac{2}{x^2} \int_0^x \left[Q(\eta,\Delta^{(N)}) - Q^{**} \right] \eta \, d\eta \right| \right\} \le \varepsilon_1, \quad (20)$$

где функция максимума рассматривается в отличие от (18), (19) на расширенном множестве V_1 элементов $y = (x, a_1, a_2)$, содержащем наряду с пространственными переменными $x \in [0,1]$ коэффициенты $a_1, a_2 \ge 0$, связанные равенством $a_1 + a_2 = 1$.

Решения $\overline{\Delta}^{(N)}$ ЗПО (17), (20) могут быть найдены по общей технологии применения альтернансного метода, описанной в разделе 2, с использованием дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения температуры в конце оптимального по быстродействию процесса индукционного нагрева, устанавливаемой на базе физических закономерностей поведения нестационарных температурных полей с внутренними электромагнитными источниками тепла и позволяющей перейти от замкнутой системы соотношений вида (5) к расчётной системе уравнений, разрешаемой относительно всех искомых неизвестных [11].

На рисунках 1, 2 представлены некоторые результаты решения предлагаемым способом задачи (17)-(19) оптимизации процесса индукционного нагрева перед прессованием цилиндрических слитков из титановых сплавов диаметром 0.54 м на промышленной частоте 50 Гц при максимальной поверхностной плотности нагрева 106 кВт/м^2 до температуры Q^{**}= 1050°С.

Результирующие распределения температур (1 – для $Q(x,\Delta^{[k]}) - Q^{**}$, 2 – для $Q_c(x,\Delta^{[k]})$) в конце оптимального по быстродействию процесса управления с учётом только одного из ограничений (18), (19) при заданных значениях $\varepsilon_1 = 60^\circ, \varepsilon_2 = 25^\circ$ показаны на рисунке 1а ($k = 1$, $\Delta_1^{[1]} = 5882$с; $\Delta_2^{[1]} = 605$с) и 1б ($k = 2$, $\Delta_1^{[2]} = 5921$с; $\Delta_2^{[2]} = 883$с), где $\Delta^{[1]}$ - решение задачи (17), (18), а $\Delta^{[2]}$ - задачи (17), (19). Как следует из рисунка 1, здесь $\max_x \left| Q_c(x,\Delta^{[1]}) \right| > \varepsilon_2$ и $\max_x \left| Q(x,\Delta^{[2]}) - Q^{**} \right| > \varepsilon_1$, что свидетельствует о необходимости перехода к решению задачи быстродействия с учётом обоих ограничений, согласно предложенному в [13] вычислительному алгоритму.



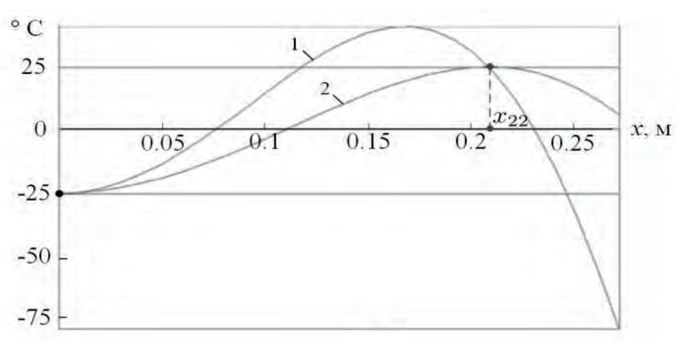
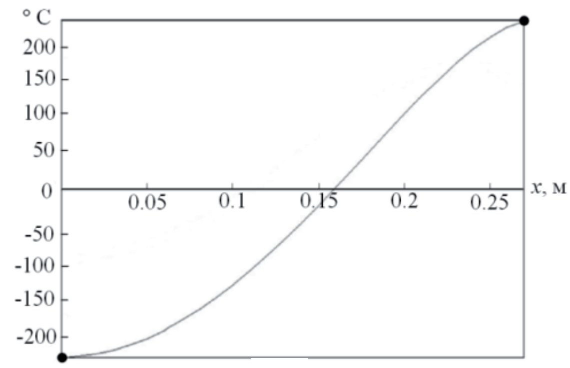


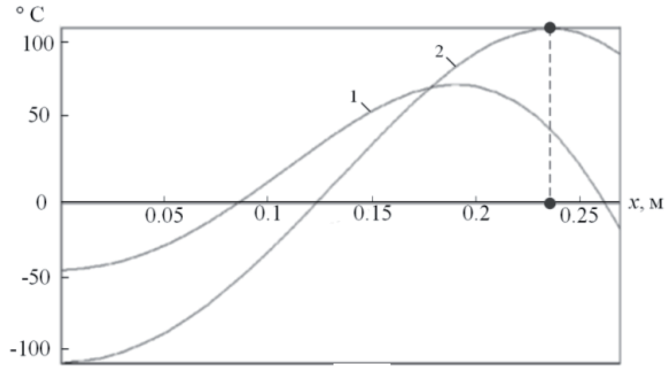
Рисунок 1 - Сравнительный анализ решений задачи оптимального быстродействия с одним ограничением

Полученные результаты представлены на рисунке 2 (а – для $qQ_c(x,\overline{\Delta}^{(1)})$ при $\varepsilon' = \varepsilon_{\mathbf{min}}^{(1)} = 263^\circ$; $\overline{\Delta}_1^{(1)} = 6109$ с; б – для $\varepsilon' = 105^\circ < \varepsilon_{\mathbf{min}}^{(1)}$; $\overline{\Delta}_1^{(2)} = 5983$ с, $\overline{\Delta}_2^{(2)} = 602$ с; *в* – для $\varepsilon' = \varepsilon^* = \varepsilon_{\mathbf{min}}^{(2)} = 65^\circ \approx \varepsilon_1$; $\overline{\Delta}_1^{(2)} = 5938$ с, $\overline{\Delta}_2^{(2)} = 821$ с).

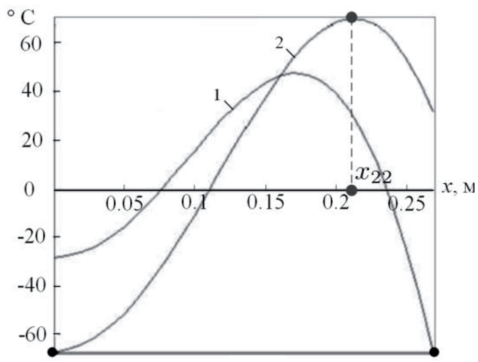
На рисунке 2 (б и в) кривые 1 и 2 иллюстрируют конечные температурные распределения соответственно $Q(x,\overline{\Delta}^{(2)}) - Q^{**}$ и $qQ_c(x,\overline{\Delta}^{(2)})$.



а



б



в

Рисунок 2 - Решение задачи оптимального быстродействия с двумя ограничениями $q = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2{,}4$

Заключение

Разработан конструктивный метод решения широкого круга параметризуемых задач программного оптимального управления системами с распределёнными параметрами в условиях оценки в равномерной метрике целевых множеств управляемой величины, усложняемых векторной формой предъявляемых требований к критериям оптимальности, учитываемым ограничениям на конечное состояние объекта и числу используемых управляющих воздействий. Показано, что на этот круг задач может быть распространён по предлагаемой технологии разработанный ранее авторами для скалярных вариантов специальный альтернансный метод поиска искомых экстремалей, являющийся дальнейшим развитием теории нелинейных чебышёвских приближений.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-08-00048).

Список источников

[1] ***Рапопорт, Э.Я.*** Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации / Э.Я. Рапопорт. - М.: Наука, 2000.– 336 с.
[2] ***Рапопорт, Э.Я.*** Оптимальное управление системами с распределенными параметрами / Э.Я. Рапопорт. - М.: Высшая школа, 2009. - 677 с.
[3] ***Гермейер, Ю.Б.*** Введение в теорию исследования операций / Ю.Б. Гермейер. - М.: Наука, 1971. - 383 с.
[4] ***Машунин, Ю.К.*** Методы и модели векторной оптимизации / Ю.К. Машунин.- М.: Наука, 1986. - 141 с.
[5] ***Корнеенко, В.П.*** Методы оптимизации / В.П. Корнеенко. - М.: Высш. шк., 2007. - 664 с.
[6] ***Токарев, В.В.*** Методы оптимальных решений. Т.2. Многокритериальность. Динамика. Неопределённость / В.В. Токарев. - М.: Физматлит, 2011. - 416 с.
[7] ***Рапопорт, Э.Я.*** Программная управляемость линейных многомерных систем с распределёнными параметрами / Э.Я. Рапопорт // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2015. - №2. - С. 22-39.
[8] ***Рапопорт, Э.Я***. Робастная параметрическая оптимизация динамических систем в условиях ограниченной неопределенности / Э.Я. Рапопорт // Автоматика и телемеханика. - 1995. - №3. - С. 86-96.
[9] ***Бутковский, А.Г.*** Оптимальное управление нагревом металла / А.Г. Бутковский, С.А. Малый, Ю.Н. Андреев. - М.: Металлургия, 1972. – 439 с.
[10] ***Бутковский, А.Г.*** Управление нагревом металла / А.Г. Бутковский, С.А. Малый, Ю.Н. Андреев. - М.: Металлургия, 1981. - 271 с.
[11] ***Рапопорт, Э.Я.*** Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева / Э.Я. Рапопорт, Ю.Э. Плешивцева. – М.: Наука, 2012.- 309 с.
[12] ***Рапопорт, Э.Я.*** Минимаксная оптимизация стационарных состояний в системах с распределёнными параметрами / Э.Я. Рапопорт // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2013. - №2. - С. 3-18.
[13] ***Pleshivtseva, Yu.E*** **.**Parametric Optimization of Systems with Distributed Parameters in Problems with Mixed Constraints on the Final State of the Object of Control / Yu.E. Pleshivtseva, E.Ya. Rapoport // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2018. - Vol. 57, No5.- P. 723-737.
[14] ***Маковский, В.А.*** Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами / В.А. Маковский. - М.: Металлургия, 1971. - 384 с.
[15] ***Рей, У***. Методы управления технологическими процессами/ У. Рей. - М.: Мир, 1983. - 386 с.
[16] ***Бутковский, А.Г.*** Методы управления системами с распределенными параметрами/А.Г. Бутковский. - М.: Наука, 1975. - 568 с.
[17] ***Бутковский, А.Г***. Структурная теория распределенных систем /А.Г. Бутковский. - М.: Наука, 1977. – 320 с.
[18] ***Бегимов, И.*** Структурное представление физически неоднородных систем / И. Бегимов, А.Г. Бутковский, В.Л. Рожанский // Автоматика и телемеханика. - 1982. - №9. - С. 25-35.
[19] ***Бегимов, И.*** Структурное представление двумерных неоднородных систем с распределёнными параметрами / И. Бегимов, А.Г. Бутковский, В.Л. Рожанский // Автоматика и телемеханика. - 1984. - №5. - С. 5-16.
[20] ***Демиденко, Н.Д.*** Управляемые распределённые системы / Н.Д. Демиденко. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. – 390 с.
[21] ***Буглак, Л.И.*** Автоматизация методических печей / Л.И. Буглак, И.Б. Вольфман, С.Ю. Ефроймович, Г.К. Захаров, М.Д. Климовицкий, А.М. Сегаль. - М.: Металлургия, 1981. - 196 с.
[22] ***Дегтярев, Г.Л.*** Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами /Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов. - М.: Машиностроение, 1986. - 214 с.
[23] ***Шашков, А.Г.*** Системно-структурный анализ процесса теплообмена и его применение / А.Г. Шашков. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 279 с.
[24] ***Чермак, И.*** Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии / И. Чермак, В. Петерка, И. Заворка. - М.: Мир, 1972. - 623 с.
[25] ***Малков, А.В.*** Синтез распределённых регуляторов для систем управления гидролитосферными процессами /А.В. Малков, И.М. Першин. - М.: Научный мир, 2007. - 252 с.

ALTERNANCE METHOD IN VECTOR PROBLEMS OF PARAMETRIC OPTIMIZATION OF SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

E.Ya. Rapoport[1], **Yu.E. Pleshivtseva**[2]

Institute of Control of Complex Systems, RAS, Samara, Russia
[1]edgar.rapoport@ mail.ru, [2]yulia_pl@mail.ru

Abstract

Constructive methods are proposed for solving a wide range of vector problems of optimal control of systems with distributed parameters (DPS) under the conditions when an accuracy of uniform approximation to the required final state of an object is prescribed on a set of spatial arguments of a controlled quantity. After the transition to the relative equivalent estimates of particular efficiency criteria the problems of vector (multi-criteria) optimization are reduced to a single-criterion version in the form of a variational problem with an integral quality criterion and with the new restrictions on the final values of the additional phase variables of the extended DPS' model. Vector (combined) constraints on the final state of the DPS are replaced by one constraint on their linear combination, which is presented in the uniform metric on the extended set of arguments, including (besides the spatial variables) the weight factors of the summable components that vary within the standard simplex. The problems of vector (multichannel) control by one or by a system of interconnected distributed objects are considered under the conditions of a specific requirement of the same duration of the control process for all control actions. Further procedures of preliminary parameterization of control actions carried out using well-known analytical conditions of optimality provide accurate reduction of the initial statements to complicated modifications of semi-infinite programming problems, which are applied to computational algorithms developed earlier by the authors for the scalar version of the alternance method of searching for the desired extremals based on their Chebyshev properties. An example of independent solution of a vector problem of optimal control of an object of technological thermophysics is given.

Key words: *systems with distributed parameters, optimal control, vector (multi-criteria) optimization, vector (combined) constraints, vector (multi-channel) control actions.*

Citation: *Rapoport EYa, Pleshivtseva YuE.* Alternance method in vector problems of parametric optimization of systems with distributed parameters [In Russian]. *Ontology of designing*. 2018; 8(4): 615-627. DOI: 10.18287/2223-9537-2018-8-4-615-627.

Acknowledgment

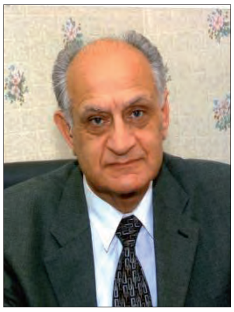
This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-08-00048).

References

[1] ***Rapoport EYa.*** Alternance method of parametric optimization in applied optimization problems [In Russian]. -. Moscow: Nauka; 2000.
[2] ***Rapoport EYa.*** Optimal control of systems with distributed parameters [In Russian]. - Moscow: Vysshaya shkola; 2009.
[3] ***Germeyer YuB.*** Introduction into the theory of operational analysis [In Russian]. - Moscow: Nauka; 1971.
[4] ***Mashunin YuK.*** Methods and models of vector optimization [In Russian]. - Moscow: Nauka; 1986.
[5] ***Korneenko VP.*** Methods of optimization [In Russian]. - Moscow: Vysshaya shkola; 2007.
[6] ***Tokarev V.V.*** Methods of optimal solutions. V.2. Multi-criteriality. Dynamics. Uncertainty [In Russian]. - Moscow:Physmatlit; 2011.
[7] ***Rapoport EYa.*** Program controllability of linear multi-dimensional systems with distributed parameters [In Russian]. Izvestiya RAS. Theory and systems of control 2015; 2: 22-39.
[8] ***Rapoport EYa.*** Robust parametric optimization of dynamic systems under conditions of limited uncertainty [In Russian]. Avtomatika i telemehanika. 1995; 3: 86-96.
[9] ***Butkovskyi AG, Malyi SA, Andreev YuN.*** Optimal control of metal heating [In Russian]. - Moscow: Metallurgy; 1972.
[10] ***Butkovskyi AG, Malyi SA, Andreev YuN.***Control of metal heating [In Russian]. - Moscow: Metallurgy; 1981.

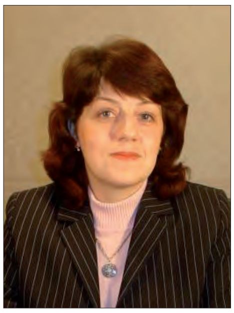
[11] ***Rapoport EYa, Pleshivtseva YuE.*** Optimal control of temperature modes of induction heating [In Russian]. - Moscow: Nauka; 2012.
[12] ***Rapoport EYa.*** Minimax optimization of stationary states of distributed parameters systems // Izvestiya RAS. Theory and control systems. 2013; 2: 3-18.
[13] ***Pleshivtseva YuE., Rapoport EYa.*** Parametric Optimization of Systems with Distributed Parameters in Problems with Mixed Constraints on the Final State of the Object of Control. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018; 57(5): 723-737.
[14] ***Makovskiy VA.*** Dynamics of metallurgical objects with distributed parameters [In Russian]. - Moscow: Metallurgy; 1971.
[15] ***Rey U.*** Methods of control of technological processes [In Russian]. - Moscow: Mir; 1983.
[16] ***Butkovskiy AG.*** Methods of control of systems with distributed parameters [In Russian]. - Moscow: Nauka; 1975.
[17] ***Butkovskiy A.G.*** Structural theory of distributed systems [In Russian]. - Moscow: Nauka; 1977.
[18] ***Begimov I, Butkovskiy AG,Rozhanskyi VL.*** Structural representation of physically heterogeneous systems [In Russian]. Avtomatika i telemehanika. 1982; 9: 25-35.
[19] ***Begimov I, Butkovskiy AG, Rozhanskyi VL.***Structural representation of two-dimensional heterogeneous systems with distributed parameters[In Russian]. Avtomatika i telemehanika. 1984; 5: 5-16.
[20] ***Demidenko ND.*** Controlled distributed systems [In Russian]. - Novosibirsk: Nauka, 1999.
[21] ***Buglak LI, Volfman IB, Yefrojmovich SYu, Zakharov GK, Klimovitskij MD, Segal AM.*** Automation of methodical heaters [In Russian]. - Moscow: Metallurgy; 1981.
[22] ***Degtyarev GL, Sirazetdinov TK.*** Theoretical foundations of optimal control of elastic spacecraft [In Russian]. - Moscow: Mashinostroenie; 1986.
[23] ***Shashkov AG.*** System-structural analysis of process of heat exchange and its application [In Russian]. - Moscow: Energoatomizdat; 1983.
[24] ***Chermak I, Peterka V, Zavorka I.*** Dynamics of regulated systems in heat-and-power engineering and chemistry [In Russian]. - Moscow: Mir; 1972.
[25] ***Malkov AV, Pershin IM.*** Synthesis of distributed regulators for systems of control of hydro lithosphere processes [In Russian]. - Moscow: Nauchnyj mir; 2007.

Сведения об авторах



Рапопорт Эдгар Яковлевич, 1936 г. рождения. Окончил Куйбышевский индустриальный институт в 1959 г., д.т.н. (1984). Профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах» Самарского государственного технического университета, заслуженный деятель науки и техники РФ. В списке научных трудов 8 монографий и более 350 работ в области теории моделирования и оптимального управления системами с распределёнными параметрами.

Edgar Yakovlevich Rapoport (b. 1936) graduated from the Kuibushev Polytechnic Institute (Kuibyshev-city) in 1959, Doctor of Science (1984). Hi is Professor at Samara State Technical University (Department of automatics and control in technical systems), Honoured Worker of science and technology of Russian Federation. He has 8 monographs and more than 350 scientific publications in the field of simulation and optimal control of systems with distributed parameters.



Плешивцева Юлия Эдгаровна, 1965 г. рождения. Окончила Куйбышевский политехнический институт им. В.В. Куйбышева в 1987 г., д.т.н. (2009). Профессор кафедры «Управление и системный анализ теплоэнергетических и социотехнических комплексов» Самарского государственного технического университета, почетный работник высшего образования РФ. В списке научных трудов 3 монографии и более 150 публикаций в области теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами.

Yuliya Edgarovna Pleshivtseva (b. 1965) graduated from the Kuibushev Polytechnic Institute (Kuibyshev-city) in 1987, Doctor of Science (2009). She is Professor at Samara State Technical University (Department of Control and System Analysis in Heat-and-Power Engineering), coauthor of 3 monographs and more than 150 publications in the field of theory of optimal control of systems with distributed parameters.