МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

УДК 005+510.8 *Научная статья* DOI: 10.18287/2223-9537-2022-12-1-93-105

Необходимость и достаточность при агрегировании на основе неубывающих функций

© 2022, Л.В. Аршинский[1]✉, В.Л. Аршинский[2]

[1]*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия*
[2]*Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Россия*

Аннотация

В работе вводится понятие агрегирования показателей как отображение множества их значений в единственное числовое значение (агрегат) с помощью ограниченной, неубывающей и отличной от константы функции $U(\boldsymbol{X})$. Введены понятия агрегирования по необходимости и достаточности и показано, что иных вариантов подобного агрегирования не существует. Исследованы свойства агрегирования по необходимости и достаточности. Введены понятия ценности и полезности подмножества показателей, как мер его необходимости и достаточности. Ценность связана с величиной снижения значения агрегата при минимизации показателей, входящих в соответствующее подмножество, полезность – со значением агрегата, когда эти показатели, и только они, принимают максимальное значение. Показано, что свойства агрегируемых систем, для каждого компонента которой существует агрегат, определяются, в том числе, законами агрегирования. Например, что каждая агрегируемая система имеет ядро – подмножество компонентов, функциональность которых определяет функциональность системы в целом.

Ключевые слова: *системный анализ, системология, агрегирование, свёртка, необходимость, достаточность.*

Цитирование: *Аршинский Л.В*., *Аршинский В.Л.* Необходимость и достаточность при агрегировании на основе неубывающих функций // Онтология проектирования. 2022. Т.12, №1(43). С. 93-105. DOI:10.18287/2223-9537-2022-12-1-93-105.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Введение

Моделирование – один из основных способов изучения систем, явлений, процессов, познание которых через непосредственное наблюдение затруднено. Замена изучаемых объектов и их отношений соответствующими моделями позволяет делать выводы о них без прямого взаимодействия с объектами. Существуют разные виды и определения моделей [1-4], но все они утверждают, что модель – это отражение свойств и отношений предметной области (ПрО) внешними по отношению к ней средствами.

Широкое распространение получило математическое моделирование, описывающее ПрО языком математики и связанное с ним численное моделирование [5]. Используются информационные и имитационные модели. В употребление вошли знаниевые модели [6, 7], описывающие ПрО с помощью баз знаний.

В системном анализе распространённым методом является агрегатное моделирование. Задача агрегирования – оценить, насколько система или её часть отвечает своей цели, насколько она функциональна, эффективна, пригодна для решения поставленных задач; дать обобщённый показатель функционирования системы. Агрегатная модель может служить дополнением к другим моделям.

Под агрегированием часто понимают суммирование информации [8].

Агрегатные модели имеют вид свёрток, в которых разнообразные показатели сводятся к одной величине – агрегату, характеризующему систему как целое. Сложившийся подход к использованию свёрток в основном опирается на понятия среднего арифметического и среднего геометрического в разных вариантах (см. [9, 10]). Так, среднее арифметическое взвешенное используется в известном методе анализа иерархий [11]. Некоторые авторы обобщают подобные свёртки до понятия аддитивных и мультипликативных свёрток [12]. В качестве обобщения также вводятся понятия симметричных и несимметричных свёрток [13]. В *OLAP*-анализе используется суммирование, взвешенное суммирование, первый (последний) ненулевой элементы и т.д. [14, 15]. Известны свёртки на основе треугольных норм и ко-норм, на основе интеграла Шоке и др. (см. [16-18]). Общий взгляд на агрегирование представлен в [19] применительно к распределённым вычислительным системам.

Агрегирование определяется целями и может выполняться по-разному. Здесь рассматривается агрегирование посредством неубывающих функций, которые обеспечивают неубывание агрегата с ростом соответствующих показателей.

Особенностью агрегатных моделей является их простота. В первую очередь это относится к агрегированию по среднему арифметическому и среднему геометрическому. Агрегирование рассматривается часто как промежуточный шаг, потребный для тех или иных выводов, например – ранжирования объектов. В то же время правильный подбор модели может оказаться важным с точки зрения верной оценки системы по её эффективности, функциональности, качеству. С помощью соответствующим образом подобранных моделей можно отражать не только вклад частей системы в общий результат, но и влияние частей друг на друга, приближая агрегатные модели к классическим математическим [20, 21].

Задача данной работы – анализ законов агрегирования при моделировании сложных систем.

1 Агрегирование по необходимости и достаточности

Пусть имеется множество неотрицательных числовых показателей $\boldsymbol{X}=\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$. Агрегированием множества $\boldsymbol{X}$ называется отображение $\boldsymbol{X}$ в единственное число A так, что A не убывает с ростом любого из показателей. Неубывающая, ограниченная и отличная от константы функция $U(\boldsymbol{X})$ (здесь и далее - это сокращённая запись для $U(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$), возможно зависящая от параметров и отображающая $\boldsymbol{X}$ в A, называется законом агрегирования, а A – агрегатом $\boldsymbol{X}$.

Определение 1.1. Агрегирование по закону $U(\boldsymbol{X})$ называется *агрегированием по необходимости*, если существует такое подмножество показателей $\boldsymbol{X_0}\subset\boldsymbol{X}$, что $\forall x(x\in\boldsymbol{X_0}\ \&\ x\rightarrow\mathbf{inf}(\boldsymbol{x})) \Rightarrow A\rightarrow\mathbf{inf}(\boldsymbol{A})$.

То есть, если все показатели из этого подмножества стремятся к своей нижней грани[1], агрегат тоже стремится к нижней грани независимо от значений остальных показателей. Здесь $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{A}$ – множества значений, соответствующих x и A. Если нижняя грань достижима, получаем: $\forall x(x\in\boldsymbol{X_0}\ \&\ x=\mathbf{min}(\boldsymbol{x})) \Rightarrow A=\mathbf{min}(\boldsymbol{A})$. Аналогичное справедливо и для верхней грани.

Подмножество $\boldsymbol{X_0}$ называется *необходимым*.

[1] Здесь нижняя и далее верхняя грани – соответственно наименьшее и наибольшее значение показателя или агрегата.

Множество $\boldsymbol{X}$ является необходимым по умолчанию. В связи с этим, если не оговорено особо, под необходимыми подмножествами понимается *собственные подмножества* множества $\boldsymbol{X}$, когда $\boldsymbol{X_0} \subset \boldsymbol{X}$, тогда как $\boldsymbol{X}$ является *тривиальным необходимым* подмножеством.

Определение 1.2. Агрегирование по закону $U(\boldsymbol{X})$ называется *агрегированием по достаточности*, если существует такое подмножество показателей $\boldsymbol{X_1} \subset \boldsymbol{X}$, что $\forall x(x \in \boldsymbol{X_1} \ \& \ x \to \mathbf{sup}(x)) \Rightarrow |A - \mathbf{inf}(A)| > \Delta$, где Δ – некоторое фиксированное число.

Для простоты вместо $|A - \mathbf{inf}(A)| > \Delta$ далее используется запись $A > \mathbf{inf}(A)$.

То есть, если все показатели, входящие в $\boldsymbol{X_1}$, стремятся к своей верхней грани, агрегат превышает свою нижнюю грань на некоторую фиксированную величину Δ независимо от значений остальных показателей.

Подмножество $\boldsymbol{X_1}$ называется *достаточным*.

Аналогично предыдущему, множество $\boldsymbol{X}$ - *тривиальное достаточное*, поэтому, если не оговорено особо, под достаточным подмножеством также понимаются *собственные подмножества* множества $\boldsymbol{X}$, когда $\boldsymbol{X_1} \subset \boldsymbol{X}$.

Утверждение 1.1. Если закон агрегирования $U(X)$ – (строго) монотонно возрастающая функция, соответствующее агрегирование есть агрегирование по достаточности.

Справедливость утверждения вытекает из того, что для (строго) монотонно возрастающей функции рост любого из характеризующих чисел приводит к росту A.

Определение 1.3. Агрегирование по закону $U(\boldsymbol{X})$ называется *смешанным*, если существуют хотя бы одно необходимое и одно достаточное подмножества.

Нетривиальным является случай, когда подмножества собственные, т.к. если принимать во внимание $\boldsymbol{X}$, смешанным является любое агрегирование.

Утверждение 1.2. Агрегирование по закону $U(\boldsymbol{X})$ может быть смешанным в том и только в том случае, если каждое необходимое подмножество пересекается со всеми достаточными, а каждое достаточное – со всеми необходимыми.

Действительно, если существуют хотя бы одно необходимое и одно достаточное подмножества, не имеющие пересечения, то устремляя все элементы первого к нижним граням, а элементы второго к верхним, получаем противоречие $A \to \mathbf{inf}(A) \ \& \ A > \mathbf{inf}(A)$. Если же пересечение имеется, условия определений 1.1 и 1.2 совместно не выполнимы.

Если это условие не выполняется, агрегирования по необходимости и достаточности – взаимоисключающие: либо одно, либо другое.

Следует подчеркнуть, что в случае $\boldsymbol{X_0} = \boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{X}$, условия $\forall x(x \in \boldsymbol{X_0} \ \& \ x \to \mathbf{inf}(x)) \Rightarrow A \to \mathbf{inf}(A)$ и $\forall x(x \in \boldsymbol{X_1} \ \& \ x \to \mathbf{sup}(x)) \Rightarrow A \to \mathbf{sup}(A) > \mathbf{inf}(A)$ соблюдаются всегда, поэтому в качестве $\boldsymbol{X_0}$ и $\boldsymbol{X_1}$, если не оговорено особо, обсуждаются только собственные подмножества.

Утверждение 1.3. Если некоторое подмножество $\boldsymbol{X}$\` - необходимое/достаточное по закону $U(\boldsymbol{X})$, то всякое подмножество $\boldsymbol{X}$\`\` такое, что $\boldsymbol{X}$\`$\subset \boldsymbol{X}$\`\`$\subseteq \boldsymbol{X}$ - необходимое/достаточное также.

Действительно, если все показатели подмножества $\boldsymbol{X}$\`\` стремятся к своим нижним граням, то к нижним граням стремятся и показатели подмножества $\boldsymbol{X}$\`. А это означает, что к нижней грани стремится $A$. То есть, $\boldsymbol{X}$\` - также необходимое подмножество.

Аналогично для достаточности. Если все показатели подмножества $\boldsymbol{X}$\`\` стремятся к верхним граням, то к верхним граням стремятся и показатели подмножества $\boldsymbol{X}$\`. А это означает, что агрегат превышает свою нижнюю грань на конечную величину. То есть, $\boldsymbol{X}$\`\` - также достаточное подмножество.

Определение 1.4. Необходимое/достаточное подмножество показателей называется *минимальным*, если любое его собственное подмножество таковым не является.

Например, если нижние грани показателей x_1, …, x_4 равны нулю (это же условие для всех последующих примеров), агрегирование по закону

$$U = (x_1+x_2)\cdot(x_3+x_4)$$

есть агрегирование по необходимости с минимальными необходимыми подмножествами $\{x_1,x_2\}$ и $\{x_3,x_4\}$ и агрегирование по достаточности - с минимальными достаточными подмножествами $\{x_1,x_2,x_3\}$, $\{x_1,x_2,x_4\}$, $\{x_1,x_3,x_4\}$, $\{x_2,x_3,x_4\}$ (в этом и последующем примерах функции не обязательно используются в агрегировании, они только иллюстративны).

При тех же условиях агрегирование по закону

$$U = x_1\cdot x_2+x_3\cdot x_4$$

есть агрегирование по достаточности с минимальными достаточными подмножествами $\{x_1,x_2\}$ и $\{x_3,x_4\}$. Одновременно оно – агрегирование по необходимости с минимальными подмножествами $\{x_1,x_2,x_3\}$, $\{x_1,x_2,x_4\}$, $\{x_1,x_3,x_4\}$, $\{x_2,x_3,x_4\}$.

Оба примера иллюстрируют также смешанное агрегирование.

Примером смешанного агрегирования является пороговая функция активации нейрона:

$$U = \begin{cases} A_{\mathbf{min}}\text{, если} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le T\text{;} \\ A_{\mathbf{max}}\text{, если} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i > T\text{.} \end{cases}$$

Если при максимальных x_i существует такая (минимальная по числу слагаемых) подсумма, что $\sum_{j=1}^{k<n} p_{i_j} x_{i_j} > T$, то соответствующие показатели образуют достаточное подмножество (таких подмножеств может быть более одного). При этом, сокращая длину подсуммы на единицу, из показателей, не входящих в неё, при том же законе агрегирования можно получить необходимое подмножество (и их также может быть более одного).

Утверждение 1.4. Всякое агрегирование есть агрегирование по необходимости или агрегирование по достаточности.

Пусть агрегирование не является агрегированием по необходимости. Это значит, что не существует такого подмножества $\boldsymbol{X_0}\subset\boldsymbol{X}$, что если все показатели из $\boldsymbol{X_0}$ стремятся к своим нижним граням, агрегат также стремится к нижней грани. Если выбрать некоторое подмножество $\boldsymbol{X_1}\subset\boldsymbol{X}$ и устремить значения всех показателей из этого множества к их верхним граням, то в этом случае агрегат $A>$ $\mathbf{inf}(A)$, т.к. иначе подмножество $\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{X_1}$ является необходимым, что противоречит условию.

Аналогично, можно предположить, что агрегирование не является агрегированием по достаточности. Это означает, что не существует такого подмножества $\boldsymbol{X_1}\subset\boldsymbol{X}$, что если все показатели из $\boldsymbol{X_1}$ стремятся к своим верхним граням, агрегат отличается на конечную величину от нижней грани. Если выбрать некоторое подмножество $\boldsymbol{X_0}\subset\boldsymbol{X}$, и устремить значения всех показателей из $\boldsymbol{X_0}$ к их нижним граням, то в этом случае агрегат также устремляется к нижней грани, т.к. в противном случае подмножество $\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{X_0}$ является достаточным, что противоречит условию.

Таким образом, если агрегирование не является агрегированием по необходимости оно является агрегированием по достаточности и наоборот.

Из произвольности выбора подмножеств $\boldsymbol{X_0}$ и $\boldsymbol{X_1}$ следует, что они могут быть в том числе и одноэлементными. Отсюда вытекают два следствия.

Следствие 1.4.1. Если закон агрегирования $U(\boldsymbol{X})$ не является агрегированием по достаточности, всякий показатель из $\boldsymbol{X}$ является необходимым.

Действительно, в силу утверждения 1.4, если функция $U(\boldsymbol{X})$ не является законом агрегирования по достаточности (в том числе смешанным агрегированием), она является законом агрегирования по необходимости. Если взять любой показатель, считая его подмножеством $\boldsymbol{X}_0$, и устремить его значение к нижней грани, то, т.к. $U(\boldsymbol{X})$ не является агрегированием по достаточности, агрегат A также стремится к нижней грани, а значит этот показатель – необходимый. Поскольку он выбран произвольно, следствие верно.

Следствие 1.4.2. Если закон агрегирования $U(\boldsymbol{X})$ не является агрегированием по необходимости, всякий показатель из $\boldsymbol{X}$ является достаточным.

Справедливость второго следствия доказывается аналогично.

Определение 1.5. Агрегирование по необходимости/достаточности называется *поэлементным*, если каждый показатель из множества $\boldsymbol{X}$ образует необходимое/достаточное подмножество.

Примерами таких агрегирований являются законы:

$$U = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

– агрегирование по необходимости, если нижние грани показателей x_i равны нулю, и агрегирование по достаточности, если все нижние грани отличны от нуля;

$$U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ;$$

– агрегирование по достаточности.

Поэлементным агрегированием по достаточности является свёртка Гермейера [22], использованная, в частности, в работах С.А Пиявского по многокритериальному оцениванию альтернатив (см. напр. [23, 24]).

Следствие 1.4.3. Агрегирование только по необходимости или только по достаточности может быть исключительно поэлементным. Во всех остальных случаях - оно смешанное.

Это становится более понятным, если принять во внимание следующие два утверждения.

Утверждение 1.5. Объединение всех необходимых подмножеств есть достаточное подмножество.

Действительно, пусть $\boldsymbol{X}$` – объединение *всех* необходимых подмножеств множества $\boldsymbol{X}$. Согласно утверждению 1.3, объединение необходимых подмножеств необходимое тоже. Далее рассматривается множество $\boldsymbol{X}$``= $\boldsymbol{X}$\$\boldsymbol{X}$`. По построению $\boldsymbol{X}$`` необходимым не является. Если устремить значения всех показателей, входящих в $\boldsymbol{X}$``, к их нижним граням, а показатели, входящие в $\boldsymbol{X}$`, к верхним, то, т.к. $\boldsymbol{X}$`` не необходимое, агрегат в этом случае, в силу неубывающего характера U, также превышает свою нижнюю грань. Это означает, что подмножество $\boldsymbol{X}$` не только необходимое, но и достаточное.

Аналогичная ситуация с достаточными подмножествами.

Утверждение 1.6. Объединение всех достаточных подмножеств есть необходимое подмножество.

Действительно, пусть $\boldsymbol{X}$` – объединение *всех* достаточных подмножеств множества $\boldsymbol{X}$. Согласно утверждению 1.3, объединение достаточных подмножеств достаточное тоже. Рассматривается множество $\boldsymbol{X}$``= $\boldsymbol{X}$\$\boldsymbol{X}$`. По построению $\boldsymbol{X}$`` достаточным не является. Если устремить значения всех показателей, входящих в $\boldsymbol{X}$``, к их верхним граням, а показатели, входящие в $\boldsymbol{X}$`, к нижним, то, т.к. $\boldsymbol{X}$`` не является достаточным, агрегат в этом случае, не может превышает свою нижнюю грань. Это означает, что подмножество $\boldsymbol{X}$` не только достаточно, но и необходимое.

Таким образом, из утверждений 1.5. и 1.6 вытекает, что несмешанным может быть только поэлементное агрегирование. Только в этом случае объединение всех необходимых/достаточных подмножеств не является собственным подмножеством, а охватывает всё множество $\boldsymbol{X}$. *Всякое иное агрегирование всегда смешанное*.

Определение 1.6. Если $U(\boldsymbol{X})$ – агрегирование по необходимости (в т.ч. возможно смешанное) и всякое необходимое подмножество состоит из одного элемента (показателя), соответствующий показатель называется *ключевым*.

Определение 1.7. Если $U(\boldsymbol{X})$ – агрегирование по достаточности (в т.ч. возможно смешанное) и всякое достаточное подмножество состоит из одного элемента (показателя), соответствующий показатель называется *обеспечивающим*.

В понятиях «ключевой» и «обеспечивающий» подчёркнуто, что это одноэлементные подмножества.

Утверждение 1.7. Если множество $\boldsymbol{X}$ имеет ключевой и обеспечивающий показатели, то этот показатель единственный.

Доказательство вытекает из утверждения 1.2. Наличие ключевого и обеспечивающего показателей возможно только при смешанном агрегировании. При этом утверждение 1.2 обеспечивается только единственным элементом.

Определение 1.8. Ключевой и одновременно обеспечивающий показатель называется *главным*.

Необходимых/достаточных показателей может быть несколько, главный показатель всегда один. Примеры:

$$U = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4)$$

– x_1 и x_2 ключевые показатели;

$$U = x_1 + x_2 + x_3 \cdot x_4$$

– x_1 и x_2 обеспечивающие показатели;

$$U = x_1 \cdot (1 + x_2 + x_3),\ U = x_1 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

– x_1 главный показатель.

Определение 1.9. Подмножество показателей в законе агрегирования называется главным, если оно одновременно является и необходимым, и достаточным.

Пример:

$$U = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_3).$$

Здесь подмножество $\{x_1, x_2\}$ главное.

Замечание. В отличие от главного показателя, который всегда единственный, главных подмножеств может быть несколько, если их общее пересечение не пусто. Например,

$$U = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) \cdot (x_1 + x_4) \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_5).$$

Здесь главные подмножества $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$ и $\{x_1, x_4\}$.

Утверждение 1.8. Если множество $\boldsymbol{X}$ имеет необходимое и достаточное подмножества (и они пересекаются), их объединение есть главное подмножество.

Действительно, пусть $\boldsymbol{X_0}$ есть необходимое, а $\boldsymbol{X_1}$ достаточное подмножество. Их объединение $\boldsymbol{X}` = \boldsymbol{X_0} \cup \boldsymbol{X_1}$ включает $\boldsymbol{X_0}$, а значит, согласно утверждению 1.2, является необходимым тоже. Аналогично, $\boldsymbol{X}`$ включает $\boldsymbol{X_1}$, а значит $\boldsymbol{X}`$ являет и достаточным тоже. Таким образом, одно и то же $\boldsymbol{X}`$ является необходимым и достаточным, а значит главным подмножеством.

Существуют (как минимум) три вида главных подмножеств:

1) объединение всех необходимых подмножеств;
2) объединение всех достаточных подмножеств;
3) объединение необходимого и достаточного.

Отсюда следует, что агрегирование только по необходимости или только по достаточности возможно в том и только в том случае, если объединение всех необходимых или всех достаточных подмножеств тождественно равно $\boldsymbol{X}$. В противном случае существует главное (отличное от $\boldsymbol{X}$) подмножество, и агрегирование будет смешанным. Это замечание дополняет утверждение 1.4 и следствия из него.

В дополнение к утверждению 1.1 можно заметить, что, если функция $U(\boldsymbol{X})$ строго монотонная, агрегирование на её основе является поэлементным достаточным. Так как при поэлементном агрегировании всякое подмножество необходимое/достаточное, то:

1) за исключением тривиального случая – множества $\boldsymbol{X}$ – смешанное агрегирование в этом случае невозможно;
2) главные показатели и подмножества (кроме самого $\boldsymbol{X}$) здесь отсутствуют.

Утверждение 1.9. Если для закона $U(\boldsymbol{X})$ существует хотя бы один ключевой показатель, то этот закон может быть или агрегированием по необходимости, или смешанным.

Утверждение 1.10. Если для закона $U(\boldsymbol{X})$ существует хотя бы один обеспечивающий показатель, т.к. этот закон может быть только законом агрегирования по достаточности или смешанным.

Утверждения 1.9 и 1.10 следуют из определений агрегирования по необходимости и достаточности, а также определений ключевого и обеспечивающего показателей.

В дополнение к этому из следствий 1.4.1 и 1.4.2 вытекает следующее.

Утверждение 1.11. Если закон $U(\boldsymbol{X})$ является агрегированием только по необходимости/достаточности, всякий показатель в нём - ключевой/обеспечивающий.

Утверждение 1.12. При поэлементном агрегировании всякий показатель либо ключевой, либо обеспечивающий.

В частности, для двух видов агрегирования – среднего арифметического и среднего геометрического (включая среднее арифметическое взвешенное и среднее геометрическое взвешенное) справедливо:

1) агрегирование с помощью среднего арифметического, являясь агрегированием по достаточности, не может иметь ключевых показателей.

2) агрегирование с помощью среднего геометрического при нулевых нижних гранях показателей не имеет обеспечивающих показателей.

Определение 1.10. Достаточное подмножество $\boldsymbol{X_1}\subset\boldsymbol{X}$ является гарантирующим, если $\forall x(x\in\boldsymbol{X_1}\ \&\ x\to\mathbf{sup}(\boldsymbol{x}))\Rightarrow A\to\mathbf{sup}(A)$.

То есть, если все показатели, входящие в $\boldsymbol{X_1}$, стремятся к своей верхней грани, агрегат также стремится к верхней грани. Существование гарантирующих подмножеств невозможно при строгой монотонности $U(\ldots)$.

В заключение можно отметить, что агрегирование по необходимости, достаточности, наличие ключевых, обеспечивающих и главных показателей, существование и состав необходимых и достаточных подмножеств и т.п. определяются структурой закона $U(\boldsymbol{X})$ и границами показателей.

2 Ценность и полезность как меры необходимости и достаточности

Для показателей, агрегируемых по закону $U(\boldsymbol{X})$, и их подмножеств можно ввести понятия *ценности* и *полезности*. Необходимо обратить внимание, что это не перенос сложившихся терминов в новую область, а омонимическое использование данных слов, хотя определённые параллели провести можно.

Пусть $\boldsymbol{X}`$ и $\boldsymbol{X}``$ - некоторые подмножества из $\boldsymbol{X}$, причём $\boldsymbol{X}`\cup\boldsymbol{X}``=\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X}`\cap\boldsymbol{X}``=\varnothing$. Тогда запись $\boldsymbol{X}^*\to\mathbf{inf}$ и $\boldsymbol{X}^*\to\mathbf{sup}$ обозначает ситуацию, когда все показатели, образующие некоторое подмножество $\boldsymbol{X}^*$, устремляются, соответственно, к своим нижним или верхним граням.

Определение 2.1. Под ценностью подмножества $\boldsymbol{X}`$ понимается предельная разность:

$$V(\boldsymbol{X}`) = U(\boldsymbol{X}\to\mathbf{sup}) - U(\boldsymbol{X}`\to\mathbf{inf}, \boldsymbol{X}``\to\mathbf{sup}).$$

То есть ценность показывает, на сколько снизится значение агрегата от своей максимально возможной величины, если значения показателей, образующих $\boldsymbol{X}$`, устремить к их нижним граням.

Для единственного показателя x_i это выглядит так:

$$V(x_i) = U(x_1 \to x_{1\max}, \ldots, x_i \to x_{i\max}, \ldots, x_n \to x_{n\max}) - U(x_1 \to x_{1\max}, \ldots, x_i \to x_{i\min}, \ldots, x_n \to x_{n\max}).$$

Здесь $x_{\min}$ и $x_{\max}$, соответственно, нижняя и верхняя грани множества значений показателя.

Определение 2.2. Под *полезностью* подмножества $\boldsymbol{X}$` понимается предельная разность:

$$W(\boldsymbol{X}`) = U(\boldsymbol{X}` \to \mathbf{sup}, \boldsymbol{X}`` \to \mathbf{inf}) - U(\boldsymbol{X} \to \mathbf{inf}).$$

Полезность показывает максимальный вклад в агрегат показателей, составляющих $\boldsymbol{X}$`.

Для единственного показателя это:

$$W(x_i) = U(x_1 \to x_{1\min}, \ldots, x_i \to x_{i\max}, \ldots, x_n \to x_{n\min}) - U(x_1 \to x_{1\min}, \ldots, x_i \to x_{i\min}, \ldots, x_n \to x_{n\min}).$$

Для необходимого подмножества:

$$V(\boldsymbol{X}`) = \mathbf{sup}(A) - \mathbf{inf}(A) \quad (1)$$

- это максимальное значение необходимости.

Если $\boldsymbol{X}$ имеет два или более необходимых подмножества $\boldsymbol{X}$`, $\boldsymbol{X}$`` и т.д., и они не пересекаются, то полезность каждого из них нулевая (ни одно подмножество не гарантирует значение агрегата больше минимального)

$$W(\boldsymbol{X}`) = W(\boldsymbol{X}``) = \ldots = 0.$$

В частности, при поэлементном необходимом агрегировании нулевую полезность имеют все показатели из $\boldsymbol{X}$.

Для достаточного подмножества:

$$W(\boldsymbol{X}`) > 0. \quad (2)$$

Если $\boldsymbol{X}$ имеет два или более достаточных подмножества $\boldsymbol{X}$`, $\boldsymbol{X}$`` и т.д., и они не пересекаются, то необходимость каждого меньше максимальной (ни одно подмножество не гарантирует минимального значения агрегата):

$$V(\boldsymbol{X}`) < \mathbf{sup}(A) - \mathbf{inf}(A);$$

$$V(\boldsymbol{X}``) < \mathbf{sup}(A) - \mathbf{inf}(A);$$

$$\ldots .$$

При поэлементном достаточном агрегировании необходимость меньше максимальной имеют все показатели из $\boldsymbol{X}$.

Если подмножество является необходимым и достаточным, (1) и (2) выполняются совместно.

При агрегировании по необходимости всегда существует хотя бы одно подмножество, ценность которого максимальна; при агрегировании по достаточности – хотя бы одно, полезность которого отлична от нуля.

При наличии гарантирующего подмножества $\boldsymbol{X}` \subset \boldsymbol{X}$ его полезность максимальна, а ценность подмножества $\boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{X}$` нулевая. Если в $\boldsymbol{X}$ существует более одного гарантирующего подмножества, и они не пересекаются, каждое из них имеет максимальную полезность и нулевую ценность.

Определение 2.3. Текущей ценностью подмножества $\boldsymbol{X}$` называется предельная разность

$$V_\tau(\boldsymbol{X}`) = U(\boldsymbol{X}) - U(\boldsymbol{X}` \to \mathbf{inf}, \boldsymbol{X}``).$$

То есть текущая ценность показывает, на сколько снизится значение агрегата от своей текущей величины, если показатели, образующие $\boldsymbol{X}$\`, и только их, устремить к нижним граням.

Для единственного показателя это выглядит как:

$$V_{\tau}(x_i) = U(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - U(x_1, \ldots, x_i \to x_{i\min}, \ldots, x_n).$$

Определение 2.4. Текущей полезностью подмножества $\boldsymbol{X}$\` называется предельная разность

$$W_{\tau}(\boldsymbol{X}`) = U(\boldsymbol{X}`, \boldsymbol{X}``\to\mathbf{inf}) - U(\boldsymbol{X}\to\mathbf{inf}) = U(\boldsymbol{X}`, \boldsymbol{X}``\to\mathbf{inf}) - \mathbf{inf}(A).$$

Текущая полезность показывает вклад в имеющийся агрегат показателей из подмножества $\boldsymbol{X}$\` в их текущих значениях.

Для единственного показателя:

$$W_{\tau}(x_i) = U(x_1\to x_{1\min}, \ldots, x_i, \ldots, x_n\to x_{n\min}) - U(x_1\to x_{1\min}, \ldots, x_i\to x_{i\min}, \ldots, x_n\to x_{n\min}).$$

Ценность и полезность являются мерами необходимости и достаточности соответствующих показателей и их подмножеств.

3 Общие свойства агрегируемых систем

Системы, для любого компонента которых может быть указан или рассчитан его агрегат, называются *агрегируемыми*. В основе их свойств должны лежать, в том числе, рассмотренные свойства агрегирования, например, следующие.

- Агрегирование может выполняться только по необходимости или достаточности (неисключающее «или»). Для каждого уровня иерархии можно ввести понятие субкомпонентов, как функциональных элементов и подсистем, образующих элемент иерархии, и надкомпонента, как элемента иерархии, составленного из своих субкомпонентов.
- При агрегировании субкомпонентов (к примеру, их функциональностей) по необходимости, как и при агрегировании по достаточности, всегда существует главное подмножество субкомпонентов, определяющих функциональность надкомпонента в целом, называемое *ядром* надкомпонента. Если агрегирование поэлементное (показателями здесь выступают агрегаты субкомпонентов), ядром является всё множество субкомпонентов, т.е. надкомпонент в целом (*тривиальное* ядро). Во всех остальных случаях ядра – это собственные подмножества субкомпонентов.
- Если агрегирование не является поэлементным, оно всегда смешанное и надкомпонент содержит нетривиальное ядро.
- Агрегируемая система может содержать ключевые/обеспечивающие/гарантирующие компоненты. При этом минимум функциональности или утрата ключевого субкомпонента влечёт минимум функциональности (утрату) надкомпонента в целом; максимальная функциональность обеспечивающего или гарантирующего субкомпонента влечёт отличную от минимальной (для обеспечивающего) и максимальную (для гарантирующего субкомпонента) функциональность содержащего их надкомпонента.
- При поэлементном агрегировании субкомпонентов каждый субкомпонент - либо необходимый, либо достаточный.
- При поэлементном агрегировании, если оно необходимое, нефункциональность любого субкомпонента делает нефункциональным надкомпонент в целом (каждый субкомпонент ключевой). При поэлементном достаточном агрегировании надкомпонент функционален до тех пор, пока в полной мере функционирует хотя бы один из его субкомпонентов (каждый субкомпонент обеспечивающий или даже гарантирующий).

- Если агрегирование происходит по (строго) монотонному закону, каждый субкомпонент – достаточный.

Заключение

В работе рассмотрено агрегирование показателей как отображение множества их значений в единственное числовое значение (агрегат) с помощью ограниченной неубывающей функции $U(\boldsymbol{X})$. Получены следующие основные результаты:

- Введены понятия агрегирования по необходимости и достаточности. Совместное агрегирование по необходимости и достаточности (смешанное агрегирование) возможно, если каждое необходимое подмножество показателей имеет пересечение с каждым достаточным и наоборот.
- Показано, что объединение всех необходимых/достаточных подмножеств показателей есть их достаточное/необходимое подмножество, такое объединение названо главным подмножеством. Оно существует всегда и является также объединением всех необходимых и достаточных подмножеств показателей.
- Показано, что агрегирование исключительно по необходимости или исключительно по достаточности возможно лишь при поэлементном агрегировании.
- Введены понятия ключевого, обеспечивающего и главных показателей, подчёркивающие влияние отдельных элементов на результат агрегирования.
- Введены показатели ценности и полезности как меры необходимости и достаточности соответствующих подмножеств показателей.

Список источников

[1] ***Глинский Б.А., Грязнов Б.С., Дынин Б.С., Никитин Е.П.*** Моделирование как метод научного исследования (гносеологический анализ). М.: Изд-во МГУ, 1965. 248 с.
[2] ***Загоруйко Н.Г.*** Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. 270 с.
[3] ***Самарский А.А., Михайлов А.П.*** Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
[4] ***Уемов А.И.*** Логические основы метода моделирования. М.: «Книга по требованию», 2012. 312 с.
[5] ***Chern I-Liang.*** Mathematical Modeling and Ordinary Differential Equations. Departament of Mathmatics National Taiwan University, 2016. 216 p.
[6] ***Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф.*** Базы знаний интеллектуальных систем. СПб: Питер, 2000. 384 с.
[7] ***Гаврилова Т.А., Кудрявцев Д.В., Муромцев Д.И.*** Инженерия знаний. Модели и методы. СПб.: Издательство «Лань», 2016. 324 с.
[8] ***Van Renesse R.*** The Importance of Aggregation // In: Future Directions in Distributed Computing / Andr´e Schiper, Alex A. Shvartsman, Hakim Weatherspoon, and Ben Y. Zhao, ed. Springer-Verlag, 2003. P. 87-92.
[9] ***Субетто А.И.*** Качество образования: проблемы оценки и мониторинга // Образование. 2000. № 2. С.62-66.
[10] ***Calzaroni M.*** The exhaustiveness of production estimates: new concepts and methodologies. 10 p. https://www.oecd.org/sdd/na/2464056.pdf.
[11] ***Saaty T.L.*** The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resources Allocation. New York, London: McGraw-Hill International Book Co, 1980. 287 p.
[12] ***Клименко И.С.*** Информационная безопасность и защита информации: модели и методы управления. М.: ИНФРА-М, 2020. 180 с.
[13] ***Zhang Ch., Toumani F., Gangler E.*** Symmetric and Asymmetric Aggregate Function in Massively Parallel Computing. https://hal.uca.fr/hal-01533675v3/document.
[14] OLAP Application Developer's Guide. – https://docs.oracle.com/cd/B19306_01/olap.102/b14349/aggregate.htm#CIAGHBCH.
[15] Metric Aggregations. – https://opendistro.github.io/for-elasticsearch-docs/docs/elasticsearch/metric-agg.
[16] ***Андронникова Н.Г., Леонтьев С.В., Новиков Д.А.*** Процедуры нечёткого комплексного оценивания // Труды международной научно-практической конференции «Современные сложные системы управления». Липецк: ЛГТУ, 2002. С.7-8.

[17] ***Субетто А.И.*** Оценочные средства и технологии аттестации качества подготовки специалистов в вузах: методология, методика, практика. СПб. М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. 68 с.

[18] ***Ахаев А.В., Ходашинский И.А., Анфилофьев А.Е.*** Метод выбора программного продукта на основе интеграла Шоке и империалистического алгоритма // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2014. №2 (32). С.224-229.

[19] ***Jesus P., Baquero C., Almeida P.S.*** A Survey of Distributed Data Aggregation Algorithms // In: IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2011. 17(1). DOI:10.1109/COMST.2014.2354398.

[20] ***Аршинский Л.В.*** Логико-аксиологический подход к оценке состояния систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 3(39). С.140-146.

[21] ***Аршинский Л.В.*** Методика агрегированного оценивания систем с поддержкой ключевых компонентов // Онтология проектирования. 2015. Т.5. № 2 (16). С.223-232. DOI:10.18287/2223-9537-2015-5-2-223-232.

[22] ***Гермейер Ю.Б.*** Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.

[23] ***Пиявский С.А.*** Прогрессивность многокритериальных альтернатив // Онтология проектированияю 2013. № 4(10). С.53-59.

[24] ***Пиявский С.А.*** Простой и универсальный метод принятия решений в пространстве критериев «стоимость-эффективность» // Онтология проектирования. 2014. № 3(13). С.89-102.

Сведения об авторах

Аршинский Леонид Вадимович, 1957 г. рождения. Окончил Иркутский государственный университет в 1979 г., д.т.н. (2008). Профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Иркутского государственного университета путей сообщения. В списке научных трудов более 200 работ в области околоэкранной аэродинамики, искусственного интеллекта, системного анализа, информационной безопасности и др. Член-корреспондент Российской академии естественных наук и Российской инженерной академии, член Российской ассоциации искусственного интеллекта. AuthorID (RSCI): 520252; Author ID (Scopus): 57193195356; Researcher ID (WoS): C-3869-2013; ORCID 0000-0001-5135-7921. *larsh@mail.ru.* ✉.

Аршинский Вадим Леонидович, 1984 г. рождения. Окончил Иркутский государственный технический университет в 2006 г., к.т.н. (2010). Руководитель центра программной инженерии Института информационных технологий и анализа данных Иркутского национального исследовательского технического университета. В списке научных трудов более 30 работ в области энергетики, системного анализа, искусственного интеллекта. AuthorID (RSCI): 520305; Researcher ID (WoS): G-9580-2012; ORCID 0000-0001-7832-1582. *arshinskyv@istu.edu.*

Поступила в редакцию 28.02.2022, после рецензирования 30.03.2022. Принята к публикации 31.03.2022.

Necessity and sufficiency in aggregation based on non-decreasing functions

© 2022, L.V. Arshinskiy[1]✉, V.L. Arshinsky[2]

[1]*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia*

[2]*Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia*

Abstract

The paper introduces the concept of aggregation of indicators as a mapping of a set of their values into a single numerical value (named aggregate) using a bounded non-decreasing and non-constant function U(X). The concepts of aggregation by necessity and sufficiency are introduced and it is shown that there are no other options for such aggregation. The properties of aggregation by necessity and sufficiency are investigated. The concepts of value and utility of a subset of indicators as measures of its necessity and sufficiency are introduced. The value is related to the decrease amount of aggregate when minimizing the indicators included in the corresponding subset, and the utility is related to the value of the aggregate when only these indicators take the maximum value. It is noted that the properties of aggregated systems (systems for each component of which there is an aggregate) are determined by the laws of aggregation among other things. For example, that each aggregated system has a core, i.e. a subset of components (subsystems and functional elements), the functionality of which determines the functionality of the system as a whole and this is not due to the nature of the system, but only to the fact that it is aggregated.

Key words: *system analysis, systemology, aggregation, convolution, necessity, sufficiency.*

For citation: *Arshinskiy LV, Arshinsky VL.* Necessity and sufficiency in aggregation based on non-decreasing functions [In Russian]. *Ontology of designing*. 2022; 12(1): 93-105. DOI: 10.18287/2223-9537-2022-12-1-93-105.

Conflict of interest: The author declares no conflict of interest.

References

[1] ***Glinskij BA, Gryaznov BS, Dynin BS, Nikitin EP.*** Modeling as a method of scientific research (epistemological analysis) [In Russian]. Moscow: Moscow State University; 1965. 248 p.
[2] ***Zagorujko NG.*** Applied methods of data and knowledge analysis [In Russian]. Novosibirsk: Institute of Mathematics SB RAS; 1999. 270 p.
[3] ***Samarskij AA, Mikhajlov AP.*** Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. 2nd ed. [In Russian]. Moscow: Fizmatlit; 2001. 320 p.
[4] ***Uemov AI.*** Logical foundations of the modeling method [In Russian]. Moscow: «Kniga po trebovaniyu»; 2012. 312 p.
[5] ***Chern, I-Liang*** Mathematical Modeling and Ordinary Differential Equations. Departament of Mathmatics National Taiwan University; 2016. 216 p.
[6] ***Gavrilova TA, Horoshevskij VF.*** Knowledge bases of intelligent systems [In Russian]. St. Petersburg: Piter; 2000. 384 p.
[7] ***Gavrilova TA, Kudryavcev DV, Muromcev DI.*** Knowledge engineering. Models and Methods: Textbook [In Russian]. St. Petersburg: Izdatel'stvo «Lan'»; 2016. 324 p.
[8] ***Van Renesse R.*** The Importance of Aggregation. In: Andr´e Schiper, Alex A. Shvartsman, Hakim Weatherspoon, and Ben Y. Zhao (ed.): Future Directions in Distributed Computing. Springer-Verlag; 2003: 87-92.
[9] ***Subetto AI.*** Quality of education: problems of assessment and monitoring [In Russian]. *Education.* 2000; 2: 62–66.
[10] ***Calzaroni, M.*** The exhaustiveness of production estimates: new concepts and methodologies. 10 p. Source: https://www.oecd.org/sdd/na/2464056.pdf
[11] ***Saaty TL.*** The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resources Allocation. New York, London: McGraw-Hill International Book Co; 1980. 287 p.
[12] ***Klimenko IS.*** Information security and information protection: management models and methods [In Russian]. Moscow: INFRA-M; 2020. 180 p.
[13] ***Zhang Ch,*** Symmetric and Asymmetric Aggregate Function in Massively Parallel Computing / F. Toumani, E. Gangler. Source: https://hal.uca.fr/hal-01533675v3/document.

[14] OLAP Application Developer's Guide. Source: https://docs.oracle.com/cd/B19306_01/ olap.102/b14349/aggregate .htm#CIAGHBCH.
[15] Metric Aggregations. Source: https://opendistro.github.io/for-elasticsearch-docs/docs/elasticsearch/metric-agg.
[16] ***Andronnikova NG, Leontiev SV, Novikov DA.*** Procedures of fuzzy complex evaluation [In Russian]. In: Proceedings of the international scientific and practical conference "Modern complex management systems". Lipetsk: LGTU; 2002: 7-8.
[17] ***Subetto AI***. Evaluation tools and technologies for certification of the quality of training specialists in universities: methodology, methodology, practice [In Russian]. St. Petersburg, Moscow: Research Center for Quality problems of training specialists; 2004. 68 p.
[18] ***Akhaev AV, Khodashinsky IA, Anfilofiev AE***. The method of choosing a software product based on the Shoke integral and the imperialist algorithm [In Russian]. Reports of the Tomsk State University of Control Systems. 2014; 2(32): 224-229.
[19] ***Jesus P, Baquero C, Almeida PS.*** A Survey of Distributed Data Aggregation Algorithms. IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2011; 17(1): 224-229. DOI:10.1109/COMST.2014.2354398.
[20] ***Arshinskiy LV***. Logical and axiological approach to assessing the state of systems [In Russian]. *Modern technologies. System analysis. Modeling.* 2013; 3(39): 140-146.
[21] ***Arshinski LV.*** A method of aggregated assessing of systems with support of key components [In Russian]. *Ontology of Designing*; 2015; 5(2): 223-232. DOI:10.18287/2223-9537-2015-5-2-223-232.
[22] ***Hermeyer YB.*** Introduction to the theory of operations research [In Russian]. Moscow; Nauka; 1971; 383 p.
[23] ***Piyavsky SA.*** Progressivity of multicriteria alternatives [In Russian]. *Ontology of Designing*. 2013; 4(10): 53-59.
[24] ***Piyavsky SA.*** A simple and universal method of decision making within the scope of criteria of «cost and efficiency» [In Russian]. *Ontology of Designing*. 2014; 3(13): 89-102.

Authors information

Leonid Vadimovich Arshinskiy (b.1957) graduated from the Irkutsk State University (Irkutsk, USSR) in 1979, Dr of Tech. Sc. (2008). He is a Professor of the Information Systems and Information Security Department at the Irkutsk State Transport University. Corresponding member of the Russian Academy of Natural Sciences and the Russian Academy of Engineering. Member of the Russian Association of Artificial Intelligence. He is the author of more than 200 scientific articles and abstracts in the field of aircraft with ground effect wings, artificial intelligence, system analysis, information security, etc. AuthorID (RCI): 520252; Author ID (Scopus): 57193195356; Researcher ID (WoS): C-3869-2013; ORCID 0000-0001-5135-7921. *larsh@mail.ru*. ✉.

Vadim Leonidovich Arshinsky (b. 1984) graduated from the Irkutsk State Technical University (Irkutsk, Russia) in 2006, PhD 2010. He is the Head of the Software Engineering Center at the School of Information Technology and Data Science of the Irkutsk National Research Technical University. The list of scientific papers includes more than 30 works in the field of energy, system analysis, and artificial intelligence. AuthorID (RCI): 520305; Researcher ID (WoS): G-9580-2012; ORCID 0000-0001-7832-1582. *arshinskyv@istu.edu*.

Received February 28, 2022. Revised March 30, 2022. Accepted March 31, 2022.