



Аналитическое и компьютерное моделирование поверхностей методом криволинейного проецирования

© 2023, Е.В. Денисова, Ю.А. Гурьева ✉

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматривается формирование поверхностей аналитическими методами и их визуализация средствами компьютерной графики. Эта тема привлекает внимание архитекторов, инженеров и учёных-механиков, которым важно видеть поверхности в конструкциях машин различного назначения и в формах сооружений, аппроксимировать сложные поверхности более простыми – аналитическими; выбирать рациональную форму оболочки из нескольких вариантов, учитывая функциональные, технологические и эргономические требования к изделию. Цель работы заключается в исследовании способов образования форм поверхностей. Методом исследования является общая аналитическая теория прикладного формообразования поверхностей, соответствующая современным требованиям применения компьютерных технологий. В работе получены параметрические уравнения циклической поверхности Иоахимсталя, показаны возможности формообразования таких поверхностей, которые рекомендованы для практического использования. На примерах визуализации поверхностей средствами компьютерной графики (программа *Maple*) показано применение аналитических моделей, позволяющих оценить конструктивные и эстетические качества оболочки в научных исследованиях, проектировании, изготовлении. Определены пути разработки аналитического аппарата, который позволяет моделировать процесс криволинейного проецирования и образования поверхностей как системы проецирующих лучей, проходящих через заданную проекцию поверхности. Целенаправленный выбор параметрической формы аналитического моделирования поверхностей способствует использованию моделей в системах автоматизированного проектирования, подготовки производства и в современных пакетах компьютерной графики (Компас 3D, *Renga*, *Revit*, *Ansys*, Лира Сапр, *Scad* и др.).

Ключевые слова: формообразование, циклическая поверхность, поверхность Иоахимсталя, конгруэнция, визуализация, аналитическое моделирование, оболочка, криволинейное проецирование.

Цитирование: Денисова Е.В., Гурьева Ю.А. Аналитическое и компьютерное моделирование поверхностей методом криволинейного проецирования // *Онтология проектирования*. 2023. Т.13, №2(48). С.204-216. DOI:10.18287/2223-9537-2023-13-2-204-216.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Введение

Конструктивные способы образования поверхностей создавались в разные времена и соответствовали потребностям науки и техники [1, 2]. Первым из них был кинематический метод, который появился вместе с возникновением начертательной геометрии [3]. На стадии зарождения этот метод был применён для формообразования линейчатых поверхностей. Первой вехой в развитии этого метода явилось отнесение одной из инцидентных линий в бесконечность. В классе линейчатых поверхностей был выделен подкласс линейчатых поверхностей с плоскостью параллелизма – поверхностей Каталана¹. Следующим конструктивным способом образования поверхностей следует признать способ преобразований, появление которого связано с зарождением научной специальности «Прикладная геометрия, ин-

¹ *Hazewinkel Michiel*, ed. (2001). *Catalan surface*, Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

женерная графика». Первыми шагами использования способа преобразований стали применения аффинных и гомологических преобразований сложных поверхностей в более простые с целью упрощения решения задач начертательной геометрии [4].

Дальнейшее развитие прикладной геометрии поверхностей ассоциировалось с решением в основном методологических проблем: теории определителя поверхности [5], теории каркаса [6], теории параметризации [7]. Способ изъятия линейного каркаса поверхности с множественного числа, в частности с конгруэнции линий, следует из этих теорий. Одним из пространственных способов выделения линейного каркаса поверхности с конгруэнции является погружение в неё линии. Кроме конгруэнции прямых в формообразовании поверхностей применяются конгруэнции окружностей, парабол [8], плоских кривых [9], цилиндрических винтовых линий, конических винтовых линий [10].

Вопросам формообразования оболочек посвящено большое количество работ. Геометрические исследования формообразования оболочек в архитектуре обобщены в [11]. До середины XX века точный аналитический метод расчёта циклических оболочек был заменён приближённым расчётом относительно простых систем, на которые можно было расчленить конструкцию. Инженеры, механики и архитекторы, используя только приближённые методы расчёта, создали немало конструкций и сооружений в форме циклических поверхностей. Из циклических поверхностей широко известны и используются: поверхности вращения, круговые винтовые поверхности и трубчатые поверхности с произвольной плоской линией центров. В циклических поверхностях одно семейство образующих кривых представляет собой окружности постоянного или переменного радиуса, что значительно упрощает процесс изготовления тонких оболочек в форме этих поверхностей.

Аналитическому описанию циклических поверхностей, в т.ч. поверхностей Иоахимстала², с использованием различных подходов посвящено много работ [12, 13]. Конструктивная схема формообразования поверхности Иоахимстала заключается в отыскании поверхности, несущей на себе траектории, ортогональные к семейству сфер с центрами на прямой [14].

1 Постановка задачи и методы

В работе использованы приёмы формообразования оболочек из циклических поверхностей Иоахимстала. Аналитическим методом исследована система проецирования сплошной конгруэнцией окружностей с общей радикальной осью, любая проецирующая поверхность которой – циклическая поверхность Иоахимстала.

Пучком окружностей на плоскости называют множество окружностей¹, имеющих общую радикальную ось. В зависимости от количества общих точек, имеющих окружности пучка с радикальной осью, пучки могут быть: гиперболические (нет общих точек), параболические (одна общая точка) и эллиптические (две общие точки). Пучки окружностей с центрами на осях OX и OZ , радикальными осями которых являются соответственно оси OZ и OX , называют сопряжёнными. Параметрические уравнения семьи окружностей имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \left(a - \frac{1}{2u}\right) + \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u}\right)^2 - a^2 + r^2} \cos t, \\ z &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u}\right)^2 - a^2 + r^2} \sin t, \end{aligned} \quad (1)$$

где a – абсциссы центра, r – радиус любой окружности, u – параметр пучка. В кинематическом способе формообразования поверхностей функции

² Поверхностью Иоахимстала называют поверхность с семейством плоских линий кривизны, лежащих в плоскостях пучка. См., например, Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. М.: Госиздат. физ.-мат. лит.-ры. 1963. 540 с.

$x = f(t, u, v)$, $y = \varphi(t, u, v)$, $z = \psi(t, u, v)$ выражают связь между прямоугольными декартовыми координатами x , y , z и специальной параметризацией пространства с помощью параметров u , v , которые являются криволинейными координатами на поверхности-носителе, и параметра положения t поверхности-носителя в его движении. Вращением вокруг оси OZ пучка (1) можно прийти к конгруэнции окружностей, параметрические уравнения которой:

$$\begin{aligned} x &= \left[a - \frac{1}{2u} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u}\right)^2 - a^2 + r^2} \cos t \right] \cos v, \\ y &= \left[a - \frac{1}{2u} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u}\right)^2 - a^2 + r^2} \cos t \right] \sin v, \\ z &= \sqrt{\left(a - \frac{1}{2u}\right)^2 - a^2 + r^2} \sin t. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку пучок окружностей (1) симметричен относительно оси OZ , вращать для получения конгруэнции следует не весь пучок, а его часть, расположенную в полуплоскости. Конгруэнцию (2) окружностей с общей радикальной осью называют сплошной.

Если вращать вокруг общей радикальной оси пучок окружностей вместе с сопряжённым пучком, первый описывает конгруэнцию траекторий, ортогональных к семейству сфер, образованных вращением сопряжённого пучка. Таким образом, чтобы получить параметрические уравнения циклической поверхности Иоахимстала, необходимо воспользоваться уравнениями, выражающими поверхность как множество лучей конгруэнции ортогональных траекторий, которые проецируют линию:

$$x = f(w), \quad y = \varphi(w), \quad z = \psi(w). \quad (3)$$

Линию следует выбрать на одной из сфер, образованной вращением окружности сопряжённого пучка. В результате получается уравнение поверхности, как семьи окружностей конгруэнции (2), проецирующих точки линии (3):

$$\begin{aligned} x &= \frac{(\alpha(w) + \sqrt{(\beta(w) - d)^2 + \psi^2(w)(\psi^2(w) + 2(\beta(w) + d))} \cos t) f(w)}{2\beta(w)}, \\ y &= \frac{(\alpha(w) + \sqrt{(\beta(w) - d)^2 + \psi^2(w)(\psi^2(w) + 2(\beta(w) + d))} \cos t) \varphi(w)}{2\beta(w)}, \\ z &= \frac{\sqrt{(\beta(w) - d)^2 + \psi^2(w)(\psi^2(w) + 2(\beta(w) + d))} \sin t}{2\sqrt{\beta(w)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$f(w) = a \cos(w_0 + c \sin(w_0)) \cos w, \quad \alpha(w) = 2a(a + r \sin(w_0 + c \sin(w_0))),$$

$$\varphi(w) = a \cos(w_0 + c \sin(w_0)) \sin w, \quad \beta(w) = a^2 \cos^2(w_0 + c \sin(w_0)),$$

$$\psi(w) = a \sin(w_0 + c \sin(w_0)) + r, \quad d = a^2 - r^2$$

a , r – соответственно расстояние от радикальной оси центра и радиус окружности, что вместе с радикальной осью задаёт пучок окружностей, который в результате вращения образует конгруэнцию окружностей;

r , a – соответственно расстояние от начала координат на радикальной оси и радиус сферы инциденции сферической линии;

w_0 – широта начальной параллели, которая является криволинейной осью синусоидальной сферической линии, аналога оси абсцисс плоской синусоидальной кривой;

c – криволинейная амплитуда синусоидальной сферической линии – аналог амплитуды плоской синусоидальной кривой;

n – количество складок (целое);

w – криволинейная координата на сфере сопряжённого пучка.

При любых выражениях функций (3) уравнения (4) выражают циклическую поверхность Иоахимстала. Уравнения (4) удобны тем, что координатные линии $t = const$, $w = const$ – это линии кривизны. На такое совпадение ориентированы методы расчёта оболочек [15, 16].

Особый интерес представляет выявление влияния параметров, входящих в уравнение (4), на форму оболочки. Окружность радиуса r с координатами центра $(a, 0)$ на плоскости ZOX задаёт вместе с осью OZ первоначальный пучок окружностей с общей радикальной осью OZ . Окружность радиуса a с координатами центра $(0, r)$ задаёт в плоскости ZOX пучок, сопряжённый с первоначальным пучком. Вращением вокруг OZ сопряжённый пучок образует семью сфер с центрами на OZ , а первоначальный пучок – конгруэнцию окружностей, которые являются ортогональными траекториями семьи сфер (рисунки 1-3). Следовательно, параметры a и r напрямую и отдельно друг от друга влияния на форму поверхности Иоахимстала не имеют. Влияние имеет их соединение, а именно

$$a^2 - r^2 = d. \quad (5)$$

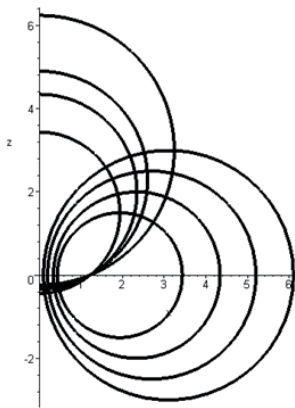


Рисунок 1 – Первичный гиперболический и сопряженный эллиптический пучки окружностей

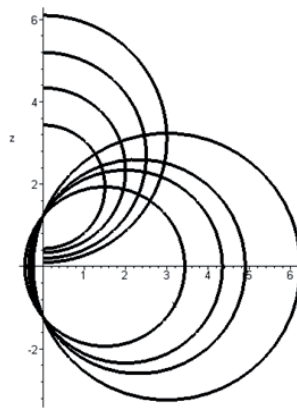


Рисунок 2 – Первичный эллиптический и сопряженный гиперболический пучки окружностей

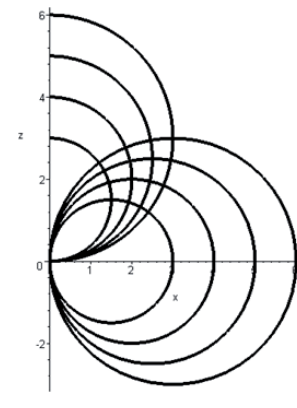


Рисунок 3 – Первичный и сопряженный параболические пучки окружностей

2 Результаты

При исследовании влияния параметров a и r на форму поверхности Иоахимстала выявлено три возможных случая:

Случай 1. $a > r$ ($d > 0$). Первоначальный пучок окружностей - гиперболический, сопряжённый – эллиптический (рисунок 1).

Гиперболический пучок окружностей содержит окружность нулевого радиуса, то есть при $r = 0$, $a = \sqrt{d}$. В этом случае сопряжённый пучок окружностей эллиптический. Все окружности сопряжённого пучка проходят через две фиксированные точки: $M_1(a, 0)$, $M_2(-a, 0)$. В результате вращения вокруг оси OZ точка M_1 описывает окружность радиуса a с центром в начале координат. Через него проходят все сферы, образованные вращением окружностей сопряжённого пучка. С целью установления достоверности результата относительно правильности параметрических уравнений (4), необходимо показать, что окружность

$$x^2 + y^2 = a^2, z = 0 \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению (4) при $r = 0$.

Из уравнения (4) при условии $z = 0$ следует: $\sin t = 0$, что было обусловлено ранее, когда назначалось начало отсчёта параметра t , равенство нулю подкоренного выражения:

$$(a^2 \cos^2 \alpha - a^2)^2 + a^2 \sin^2 \alpha (a^2 \sin^2 \alpha + 2a^2 \cos^2 \alpha + 2a^2) = 4a^4 \sin^2 \alpha = 0, \quad (7)$$

где $\alpha = w_0 + c \sin(wn)$.

Равенство (7) возможно в двух случаях: $a = 0$ или $\sin \alpha = 0$. Сопоставив, получится $w_0 = 0$, $c = 0$. Поскольку w_0 и c использованы в представлении сферической линии на одной из сфер пучка, образованного сопряжённым пучком окружностей, то подставив полученные значения $r = 0$, $\sin t = 0$, $\cos t = \pm 1$ в уравнения (4), получится:

$$x = \frac{2a^3 \cos w}{2a^2}, \quad y = \frac{2a^3 \sin w}{2a^2}, \quad z = 0. \quad (8)$$

Если возвести обе части последних равенств (8) в квадрат и приравнять суммы левых и правых частей полученных равенств, получится выражение:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (9)$$

(9) – уравнение сферы, которое при $z = 0$ переходит в уравнения (6) линии пересечения сферы плоскостью $z = 0$.

Таким образом, при $r = 0$, $z = 0$, $w_0 = 0$, $c = 0$ получается сферическая линия – окружность (6), которую нельзя использовать для представления поверхности (4), поскольку лучи конгруэнции, образованные первоначальным пучком, есть окружности нулевого радиуса.

Случай 2. $a < r$ ($d < 0$). Первоначальный пучок окружностей – эллиптический (рисунок 2), все его окружности проходят через две фиксированные точки, расположенные на оси OZ :

$$N_1(0, \sqrt{r^2 - a^2}), N_2(0, -\sqrt{r^2 - a^2}).$$

Точки N_1, N_2 являются фокальными для конгруэнции ортогональных траекторий семьи сфер, образованной сопряжённым пучком окружностей. Любая поверхность конгруэнции проходит через эти точки. Значение параметра t для них:

$$t = \pm \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} + \pi. \quad (10)$$

В этом случае необходимо принимать во внимание уравнение, показывающее равенство нулю радиуса сферы, которая принадлежит пучку, образованному сопряжённым пучком окружностей.

Случай 3. $a = r$ ($d = 0$). Первоначальный и сопряжённый пучки окружностей – параболические (рисунок 3).

Окружности первоначального пучка и образованной им конгруэнции соприкасаются с радикальной осью OZ . Окружности сопряжённого пучка соприкасаются с радикальной осью OX , а образованные ими сферы семьи с центрами на OZ соприкасаются с плоскостью XOY . Как первые, так и вторые касания происходят в начале координат, который можно рассматривать как вырождение окружности конгруэнции – геометрического места окружности нулевого радиуса первоначального пучка при его вращении вокруг OZ в момент перехода гиперболического первоначального пучка в параболический.

Т.к. a и r входят в определитель как первоначального, так и сопряжённого пучков окружности, которые в свою очередь образуют соответственно конгруэнцию ортогональных траекторий и семью сфер, непосредственно окружность радиуса r с центром $(a, 0)$ и сфера радиуса a с центром $(0, r)$ могут быть вне области определения создаваемой поверхности Иохимсталя. Такое же заключение можно сделать в отношении сферической линии, которая

задаётся функциями $f(w)$, $\varphi(w)$, $\psi(w)$ на сфере радиуса a с координатами центра $(0, r)$. Область определения поверхности зависит от интервала значений t , который определяется в процессе построения.

При $d < 0$ и интервале t поверхность будет иметь две конические точки $N_1(0, \sqrt{r^2 - a^2})$ и $N_2(0, -\sqrt{r^2 - a^2})$. Рисунок 4 демонстрирует такой случай при $0 \leq t \leq \frac{7\pi}{6}$. Построения поверхностей производились с помощью программы *Maple*.

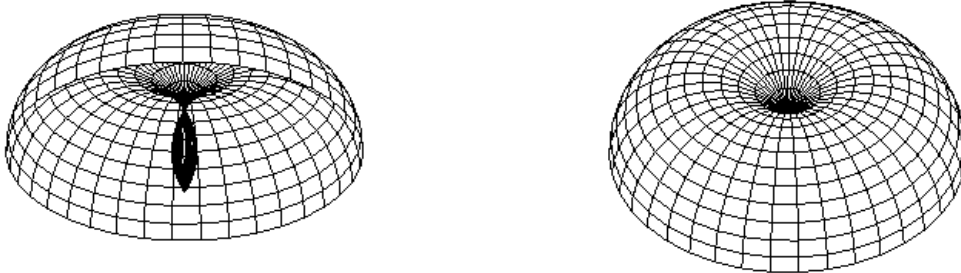


Рисунок 4 – При $d < 0$ и интервале $0 \leq t \leq \frac{7\pi}{6}$ поверхность имеет две конические точки

$$N_1(0, \sqrt{r^2 - a^2}) \text{ и } N_2(0, -\sqrt{r^2 - a^2})$$

Добиться исключения отсека, расположенного между коническими точками, можно уменьшением интервала до $0 \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ (рисунок 5).

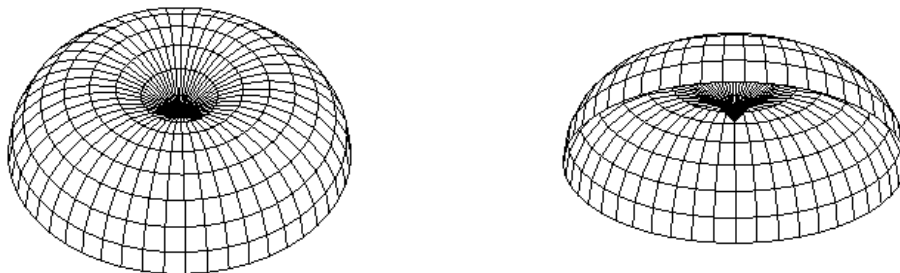


Рисунок 5 – При $d < 0$ уменьшение интервала до $0 \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ для исключения отсека, расположенного между коническими точками

Пределу интервала отвечает одна коническая точка. Дальнейшее уменьшение интервала $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ приводит к появлению отверстия (рисунок 6).

Следует отметить, что касательные в точках N_1 , N_2 к семье линий $w = const$, по которым поверхность (4) пересекается с плоскостями пучка и с осью OZ , образуют конусы (рисунок 7). При $d = 0$ точки N_1 и N_2 совпадают друг с другом и с началом координат. Окружности $w = const$ не пересекаются с осью OZ , а соприкасаются с ней в начале координат. Конус касательных к линиям $w = const$ поверхности (4) вырождается в прямую линию – ось OZ . Особой точке (начало координат) поверхности (4) отвечает значение $t = \pi$ (рисунок 7).

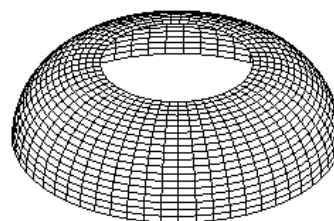


Рисунок 6 – Появление отверстия при уменьшении интервала до $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Поскольку наличие такой острой формы в конструкциях крайне нежелательно, для предотвращения её появления рекомендовано назначать соответствующую границу интервала таким образом, чтобы интервал не содержал $t = \pi$. Если ограничиться значениями $0 \leq t \leq 2\pi$ (исключая $t = \pi$), то верхней границе интервала $t = \pi$ определения поверхности соответствует её направленность остриём вниз, нижней границе – остриём вверх (рисунок 8).

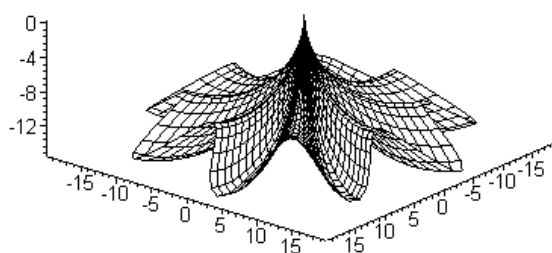


Рисунок 7 – Особая точка (начало координат) поверхности (4) при $d = 0$, которой соответствует значение $t = \pi$

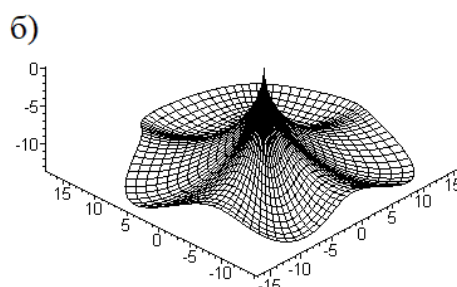
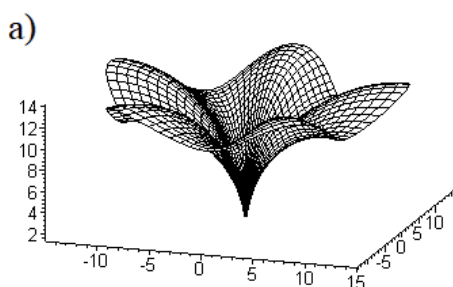


Рисунок 8 – Положение острия поверхности (остриё вниз при $t < \pi$, остриё вверх при $t > \pi$): а) при $1,5 \leq t \leq 3$; б) при $3,5 \leq t \leq 5$

Конгруэнция окружностей, образованная первоначальным пучком, имеет плоскость симметрии XOY . Поэтому смена знака параметра w_0 на противоположный не влияет на положение и направление острой формы (рисунок 9) в особой точке (начале координат).

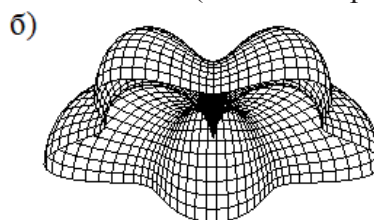
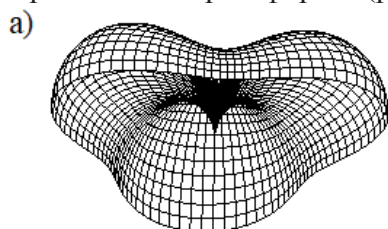


Рисунок 9 – Форма поверхности при смене знака параметра w_0 : а) при $w_0 = -\frac{\pi}{4}$; б) при $w_0 = \frac{\pi}{4}$

Параметр w_0 влияет на величину проекции амплитуды c на ось OZ . На рисунке 10 наглядно показано влияние изменения параметра c на получаемые модели поверхности. Амплитуда сферической синусоидальной линии – это её экстремальное отклонение вдоль меридиана сферы от окружности с широтой w_0 .

На форму поверхности также влияет параметр n , который соответствует количеству складок. При $n = 1$ получается дважды циклическая поверхность Йоахимсталя – отсек циклиды Дюпена (рисунок 11а), при $n = 2$ поверхность напоминает шляпу (рисунок 11б), при $n > 2$ – появляются хорошо выраженные складки, количество которых равно n .

Необходимо подчеркнуть, что семь координатных линий $w = const$ (окружности или их дуги) и $t = const$ (сферические линии) являются линиями кривизны. Соединение (совпадение) координатной сетки с сеткой линий кривизны важно при использовании методов расчёта оболочек.

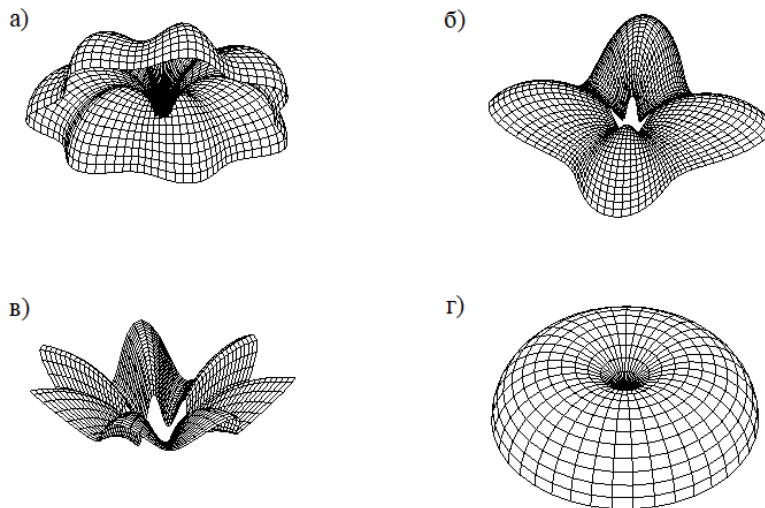


Рисунок 10 – Модели поверхности при разных значениях параметра c :
 а) $c = 0,07$; б) $c = 0,15$; в) $c = 0,2$; г) при $c = 0$ получается поверхность вращения



Рисунок 11 – Поверхности при разных значениях параметра n , который соответствует количеству складок:
 а) при $n = 1$ получается дважды циклическая поверхность Иохимсталя – отсек циклиды Дюпена;
 б) при $n = 2$ поверхность напоминает шляпу

3 Выводы

По результатам анализа исследований, проведённых в области образования поверхностей лучами криволинейного проецирования, можно сделать следующие выводы.

На примерах показаны широкие возможности формообразования циклических поверхностей Иохимсталя, которые рекомендованы для использования в проектировании складчатых оболочек, благодаря следующим свойствам:

- многопараметричность общих моделей, позволяющая охватить широкий круг форм варьированием значениями параметров;
- отнесение к линиям кривизны, что является предпосылкой применения методов расчёта оболочки на прочность;
- программные реализации разработанных аналитических моделей позволяют оценить конструктивные и эстетические качества оболочки по наглядным графическим изображениям.

Применение методов криволинейного проецирования и поверхностей, образуемых этими методами, охватывают различные области [17-24]: решение задач начертательной геометрии, профилирование режущего инструмента, конструирование исполнительных органов землеобрабатывающих машин, моделирование пространства на плоскости, конструирование оболочек. Системы проецирования рассматриваются не только на плоскости, но и на криволинейных поверхностях.

Полученные поверхности и их алгебраические описания можно использовать для разработки удобных для работы плагинов различных программных комплексов (рисунки 12-16), в том числе для программ геометрического 3D моделирования и *ВМ* программ (Компас 3D, Nanocad, Inventor, Renga, Revit и др.), а также для разработки расчётных моделей объектов не

только для получения геометрии, но и при формировании сетки (*Meshing*) расчётных моделей (программы *Ansys*, ЛИРА САПР, *Scad* и др.) [25-27].

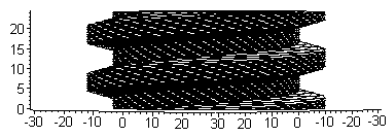


Рисунок 12 – Винтовая нарезка трапецеидальной резьбы

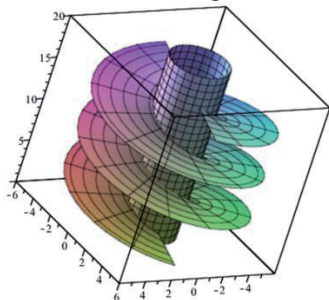


Рисунок 13 – Визуализация поверхности «Шнек»

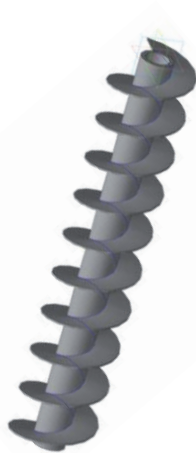


Рисунок 14 – Модель шнека для бурения

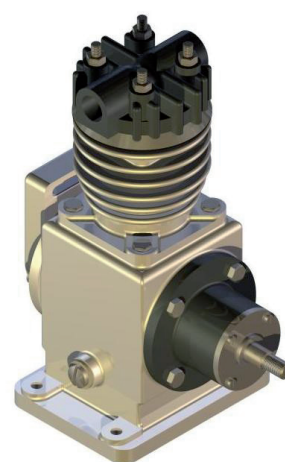


Рисунок 15 – Модель компрессора

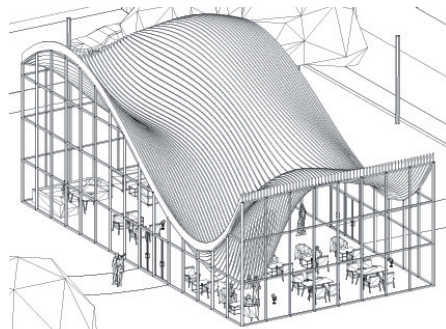
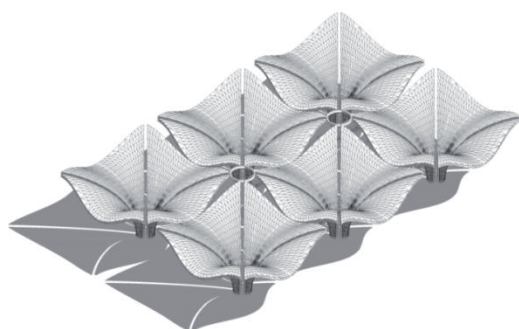


Рисунок 16 – Модели навесов

Заключение

Применение систем криволинейного проецирования в научных исследованиях, проектировании и производстве на оборудовании с числовым программным управлением сдерживается отсутствием общей математической модели, на основе которой можно было бы разрабатывать и развивать необходимые компьютерные технологии. Такая ситуация вызвана тем, что способы криволинейного проецирования зарождались и развивались на конструктивной основе, их аналитические интерпретации были разрознены и не привели к возникновению схемы обобщённого характера. Решения основывались на алгебраическом подходе, в то время как современные программные продукты в этой области ориентированы на параметрическое представление.

Общая аналитическая модель, предложенная в работе, реализована для систем криволинейного проецирования, лучами которых являются окружности. Циклические поверхности могут принимать привлекательные с точки зрения архитектора формы. Поэтому важно иметь теоретическое обобщение поставленной задачи, которое представлено в разработке общей аналитической модели систем криволинейного проецирования и их проецирующих поверхностей, отличающихся параметрическим представлением, которое позволяет выделить ха-

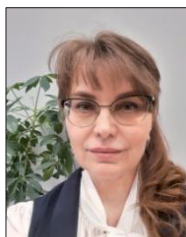
рактёрную семью линий на поверхности в системах компьютерной графики и затем в системах с числовым программным управлением программировать обработку вдоль этих линий. На параметрическое представление ориентированы современные пакеты автоматизированных систем научных исследований, автоматизации проектных работ и технологической подготовки производства.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] *Cayley A.A* Third memoir on skew surfaces otherwise scrolls // Philosophical Transactions of Royal Society of London. 1869. Vol. CLIX.
- [2] *Darboux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces. Paris. 1914. Vol. 4. 576 p.
- [3] *Монж Г.* Начертательная геометрия. Москва: Изд-во АН СССР. 1947. 291 с.
- [4] *Джапаридзе И.С.* Геометрические преобразования пространства и их применение в начертательной геометрии // Методы начертательной геометрии и её приложения. Москва. ГИТТЛ. 1955. С.54-82.
- [5] *Рыжов Н.Н.* Определитель поверхности и его применение // Труды Университета дружбы народов им. П. Лумумбы. Том LIII: Прикладная геометрия. Вып. 4. Москва. 1971. С.3-16.
- [6] *Рыжов Н.Н.* О теории каркаса // Труды Университета дружбы народов им. П. Лумумбы. Том II: Начертательная геометрия. Вып. 1. Москва. 1963. С.9-19.
- [7] *Рыжов Н.Н.* Параметризация поверхностей // Труды Университета дружбы народов им. П. Лумумбы. Том XXVI: Математика. Вып. 3: Прикладная геометрия. Москва. 1967. С.3-17.
- [8] *Нарзуллаев С.А.* Множество окружностей, выделение из него циклических поверхностей // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 66. Київ: КНУБА. 1999. С.123-125.
- [9] *Ivzhenko A.V.* Designing surfaces by separating them from congruences of parabolas // Collection of works of the III International Scientific and Practical Conference "Modern Problems of Geometric Modeling". Vol. II. Melitopol, Ukraine. 1996. P.231-232.
- [10] *Simenko E.V., Ignatiev S.A., Voronina M.V.* Analytical and computer graphic method of surfaces' formation projected by rays of congruence of cylindrical screw lines with the constant step // International Journal of Engineering and Technology. № 9(5). 2017. P.3912-3921.
- [11] *Тевлин А.М.* Методы нелинейных отображений и их технические приложения. Москва: МАИ. 1971. 136 с.
- [12] *Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л.* Формообразование оболочек в архитектуре. Киев: «Будівельник». 1972. 270 с.
- [13] *Михайленко В.Е., Ковалев С.Н.* Конструирование форм современных архитектурных сооружений. Киев: «Будівельник». 1978. 112 с.
- [14] *Иванов В.Н.* Конструирование оболочек на основе каналовых поверхностей Иоахимсталля // Вестник РУДН: специальный выпуск «Инженерные исследования». № 1. 2000. С.23-30.
- [15] *Иванов В.Н.* Циклические поверхности: геометрия, классификация, конструирование оболочек // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной форм. Труды Международной научной конференции. Москва: изд-во РУДН. 2001. С.127-134.
- [16] *Скидан І.А., Фролов О.В.* Каналові поверхні Іоахімсталля з плоскою лінією центрів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Т.16. Мелітополь: ТДАТА. 2002. С.130-134.
- [17] *Frumusani G., Berbinschi S., Oancea N.* Cylindrical surfaces enwrapping helical surfaces rack-tool versus planning tool // Proceedings in Manufacturing Systems. № 8(3). 2013. P.153-158.
- [18] *Skidan I.A.* Generalization of Analytical Formation Methods // The Applied Geometry and Engineering Graphics. Kiev: Ukraine: KNUBA. 2002. P.79-84.
- [19] *Ćuković S., Devedžić G., Ghionea I.* Automatic determination of grinding tool profile for helical surfaces machining using catia/vb interface // U.P.B. Sci. Bull. Series D. № 72(2). 2009. P.85-96.
- [20] *Иванов В.Н., Наср Юнес Ахмед Аббуши.* Расчёт каналовых поверхностей Иоахимсталля на собственный вес вариационно-разностным методом // Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы / Труды Международной научной конференции. Москва: изд-во РУДН. 2001. С.121-126.
- [21] *Ergut M., Korpinar T., Turhan E.* On normal ruled surfaces of general helices in the sol space // TWMS J. Pure Appl. Math. № 4(2). 2013. P.125-130.
- [22] *Baroiu N., Berbinschi S., Teodor V., Oancea N.* The modeling of the active surfaces of a multi-flute helical drill with curved cutting edge using the toolbox environment / ICN-2012 13th International Conference on Tools. 2012.

- [23] **Han Quan-Quan, Liu Ri-Liang** Mathematical Model and Tool Path Calculation for Helical Groove Whirling / Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. 6(1). 2013. P.3584-3587.
- [24] **Hudyakov G.I.** Development of methods of analytical geometry of a sphere for solving geodesy and navigations tasks / Journal of Mining Institute. Vol. 223. 2017. P.70-82.
- [25] **Simenko E.V., Voronina M.V.** Constructive methods of forming surfaces / International Journal of Applied Engineering Research. № 6, V. 12. 2017. P.956-962.
- [26] **Denisova E.V.** Geometric Modeling of New Surface Shapes in Architecture. 2022. AIP Conference Proceedings 2657(1):020001. DOI:10.1063/5.0107523.
- [27] **Simenko E.V., Voronina M.V.** Constructive methods of forming surfaces / International Journal of Applied Engineering Research. 12(6). 2017. P.228-234.

Сведения об авторах



Денисова Елена Васильевна. Окончила Ленинградский горный институт по специальности «Прикладная геодезия». К.т.н. (2006). Заведующая кафедрой начертательной геометрии и инженерной графики Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ). Научные интересы: разработка общей аналитической и компьютерно-графической модели систем проецирования. Author ID (РИНЦ): 896146. SPIN-код: 3913-0954; ORCID: 0000-0001-5058-1200. Deni_sovaev@mail.ru.



Гурьева Юлиана Александровна. Окончила СПбГАСУ по специальности «Промышленное и гражданское строительство». К.т.н. (2009). Доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики СПбГАСУ. Author ID (РИНЦ): 510965. SPIN-код: 3262-5546. ORCID: 0000-0002-5814-423X. Yual2017@mail.ru. ✉.

Поступила в редакцию 11.05.2023, после рецензирования 27.06.2023. Принята к публикации 29.06.2023.



Scientific article

DOI: 10.18287/2223-9537-2023-13-2-204-216

Analytical and computer modeling of surfaces with the curvilinear projection method

© 2023, E.V. Denisova, Yu.A. Guryeva ✉

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The article discusses the shaping of surfaces by analytical methods and their visualization by means of computer graphics. This topic attracts the attention of architects, engineers and mechanical scientists, for whom it is important to see the surfaces in the structures of machines for various purposes and in the forms of structures, to approximate complex surfaces with simpler ones - analytical ones; choose a rational form of the shell from several options, taking into account the functional, technological and ergonomic requirements for the product. The purpose of the work is to study the methods of formation of surface shapes. The research method is the general analytical theory of applied surface shaping, which meets modern requirements for the use of computer technology. In this paper, parametric equations of the cyclic surface of Joachimsthal are obtained, the possibilities of shaping such surfaces, which are recommended for practical use, are shown. Using examples of visualization of surfaces by means of computer graphics (Maple program), the use of analytical models is shown, which makes it possible to quickly and reliably assess the constructive and aesthetic qualities of the shell in scientific research, design, and manufacture. The ways of developing an analytical apparatus are determined, which allows modeling the process of curvilinear projection and the formation of surfaces as a system of projecting rays passing through a given surface projection. The purposeful choice of the parametric form of analytical modeling of surfaces contributes to the direct use of models in automated design systems, pre-production systems and in modern computer graphics packages (Kompas 3D, Renga, Revit, Ansys, Lira Sapr, Scad, etc.).

Keywords: *shaping, cyclic surface, Joachimstal surface, congruence, visualization, analytical modeling, shell, curved projection.*

For citation: *Denisova EV, Guryeva YuA. Analytical and computer modeling of surfaces with the curvilinear projection method [In Russian]. *Ontology of designing.* 2023; 13(2): 204-216. DOI: 10.18287/2223-9537-2023-13-2-204-216.*

Conflict of interest: The author declares no conflict of interest.

List of figures

Figure 1 – Primary hyperbolic and conjugate elliptic circle bundles

Figure 2 – Primary elliptic and conjugate hyperbolic circle bundles

Figure 3 – Primary and conjugate parabolic circle bundles

Figure 4 – At $d < 0$ and the interval $0 \leq t \leq \frac{7\pi}{6}$, the surface will have two conical points $N_1(0, \sqrt{r^2 - a^2})$ and

$$N_2(0, -\sqrt{r^2 - a^2})$$

Figure 5 – For $d < 0$, reducing the interval to $0 \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ to exclude the compartment located between the conical points

Figure 6 – The appearance of a hole when the interval is reduced to $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Figure 7 – The singular point (origin) of the surface (4) at $d = 0$, to which the value corresponds $t = \pi$

Figure 8 – The position of the tip of the surface (tip down at $t < \pi$, tip up at $t > \pi$):

a) when $1,5 \leq t \leq 3$; b) when $3,14 \leq t \leq 5$

Figure 9 – The shape of the surface when changing the sign of the parameter w_0 : a) when $w_0 = -\frac{\pi}{4}$; b) when $w_0 = \frac{\pi}{4}$

Figure 10 – Surface models at different values of the parameter with: a) $c = 0.07$, b) $c = 0.15$, c) $c = 0.2$, d) at $c = 0$ the surface of rotation is obtained

Figure 11 – Surfaces at different values of the parameter n , which corresponds to the number of folds: a) at $n = 1$, a doubly cyclic Joachimstal surface is obtained – a compartment of the Dupin cyclide; b) at $n = 2$ the surface resembles a hat

Figure 12 – Screw cutting of trapezoidal thread

Figure 13 – Visualization of the "Auger" surface

Figure 14 – Auger model for drilling

Figure 15 – Compressor model

Figure 16 – Shed models

References

- [1] **Cayley AA.** Third memoir on skew surfaces otherwise scrolls. Philosophical Transactions of Royal Society of London. 1869. Vol. CLIX.
- [2] **Darboux G.** Lecons sur la theorie generale des surfaces. Paris. 1914. Vol. 4. 576 p.
- [3] **Monge G.** Descriptive geometry [In Russian]. AN USSR. Moscow. 1997. 291 p.
- [4] **Japaridze IS.** Geometric transformations of space and their application in descriptive geometry [In Russian]. Methods of descriptive geometry and its applications. Moscow: GITTL. 1955. P.54-82.
- [5] **Ryzhov NN.** Surface determinant and its application [In Russian]. Proceedings of the Peoples' Friendship University named after P. Lumumba. Vol. LIII: Applied Geometry. Issue 4. 1971. P.3-16.
- [6] **Ryzhov NN.** About the framework theory [In Russian]. Proceedings of the Peoples' Friendship University named after P. Lumumba. Vol. II: Applied Geometry. Issue 1. 1963. P.9-19.
- [7] **Ryzhov NN.** Parameterization of surfaces [In Russian]. Proceedings of the Peoples' Friendship University named after P. Lumumba. Vol. XXVI: Mathematics. Issue 3: Applied Geometry. 1967. P.3-17.
- [8] **Narzullaev SA.** The set of circles, the selection of cyclic surfaces from it [In Russian]. Applied geometry and engineering graphics. Kiev: KNUBA. 1999; 66: 123-125.
- [9] **Ivzhenko AV.** Designing surfaces by separating them from congruences of parabolas. Collection of works of the III International Scientific and Practical Conference "Modern Problems of Geometric Modeling". Vol. II. Melitopol, Ukraine. 1996. P.231-232.
- [10] **Simenko EV, Ignatiev SA, Voronina MV.** Analytical and computer graphic method of surfaces' formation projected by rays of congruence of cylindrical screw lines with the constant step. International Journal of Engineering and Technology. 2017; 9(5): 3912-3921.

- [11] **Tevlin AM.** Nonlinear mapping methods and their technical applications [In Russian]. Moscow: MAI. 1971. 136 p.
 - [12] **Mikhailenko VE, Obukhova VS, Podgorny AL.** Shaping of shells in architecture [In Russian]. Kiev: Budivel'nik. 1972. 270 p.
 - [13] **Mikhailenko VE, Kovalev SN.** Design of the forms of modern architectural structures [In Russian]. Kiev: Budivel'nik. 1978. 112 p.
 - [14] **Ivanov VN.** Design of shells based on Joachimsthal channel surfaces [In Russian]. RUDN Bulletin: Special Issue "Engineering Research". 2000; 1: 23-30.
 - [15] **Ivanov VN.** Cyclic surfaces: geometry, classification, shell design [In Russian]. Shell architecture and strength analysis of thin-walled building and machine-building structures of complex shape / Proceedings of the International Scientific Conference. Moscow: RUDN Publishing House. 2001. P. 127-134.
 - [16] **Skidan IA, Frolov OV.** Channel surfaces of Joachimsthal with a flat line of centers [In Ukrainian]. Applied geometry and engineering graphics. Works Tavriya State Agrotechnical Academy. 2002; 16(4): 130-134.
 - [17] **Frumusanu G, Berbinschi S, Oancea N.** Cylindrical surfaces enwrapping helical surfaces rack-tool versus planning tool. Proceedings in Manufacturing Systems. № 8(3). 2013. P. 153-158.
 - [18] **Skidan IA.** Generalization of Analytical Formation Methods // The Applied Geometry and Engineering Graphics. Kiev: Ukraine: KNUBA. 2002. P. 79-84.
 - [19] **Čuković S, Devedžić G, Ghionea I.** Automatic determination of grinding tool profile for helical surfaces machining using catia/vb interface. U.P.B. Sci. Bull. Series D. № 72(2). 2009. P. 85-96.
 - [20] **Ivanov VN, Nasr Younes Ahmed Abbushi.** Calculation of Joachimsthal channel surfaces for dead weight by the variational-difference method [In Russian]. Shell architecture and strength analysis of thin-walled building and machine-building structures of complex shape / Proceedings of the International Scientific Conference. Moscow: RUDN Publishing House. 2001. P.121-126.
 - [21] **Ergut M, Korpinar T, Turhan E.** On normal ruled surfaces of general helices in the sol space. TWMS J. Pure Appl. Math. 2013; 4(2): 125-130.
 - [22] **Baroiu N, Berbinschi S, Teodor V, Oancea N.** The modeling of the active surfaces of a multi-flute helical drill with curved cutting edge using the toolbox environment. ICN-2012 13th International Conference on Tools. 2012.
 - [23] **Han Quan-Quan, Liu Ri-Liang** Mathematical Model and Tool Path Calculation for Helical Groove Whirling. Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. 2013; 6(1): 3584-3587.
 - [24] **Hudyakov GI.** Development of methods of analytical geometry of a sphere for solving geodesy and navigations tasks. Journal of Mining Institute. 2017; 223: 70-82.
 - [25] **Simenko EV, Voronina MV.** Constructive methods of forming surfaces. International Journal of Applied Engineering Research. 2017; 12(6): 956-962.
 - [26] **Denisova EV.** Geometric Modeling of New Surface Shapes in Architecture. 2022. AIP Conference Proceedings 2657(1):020001. DOI:10.1063/5.0107523.
 - [27] **Simenko EV, Voronina MV.** Constructive methods of forming surfaces / International Journal of Applied Engineering Research. 12(6). 2017. P. 228-234.
-

About the authors

Denisova Elena Vasilievna. Graduated from the Leningrad Mining Institute with a degree in Applied geodesy. Ph.D of Tech. Science (2006). Head of Descriptive Geometry and Engineering Graphics Department, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU). Research interests include development of a general analytical and computer and graphical model of projection systems. AuthorID (РИНЦ): 896146; ORCID: 0000-0001-5058-1200. Deni_sovaev@mail.ru.

Guryeva Yuliana Aleksandrovna. Graduated from the St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU) with a degree in Industrial and civil construction. Ph.D of Tech. Science (2009). Associate Professor of Descriptive Geometry and Engineering Graphics Department, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU). Author ID (РИНЦ): 510965. SPIN-код: 3262-5546. ORCID: 0000-0002-5814-423X. Yual2017@mail.ru ✉

Received May, 11. 2023. Revised June, 27. 2023. Accepted June, 29. 2023.
