



Функция локального обнуления в геометрическом моделировании алгебраическими функциями

© 2026, А.В. Толок ✉, Н.Б. Толок

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Москва, Россия

Аннотация

Рассматривается интерактивный принцип геометрического моделирования алгебраическими функциями для автоматизированного построения пространственной твёрдотельной цифровой модели по плоским чертежам. Применение R -функционального моделирования к решению задач описания алгебраическими функциями сложного геометрического контура по чертежу содержит два основных недостатка – сложность описания нуль-контура по заданным точкам чертежа и большие затраты времени компиляции формул для компьютерных расчётов. В статье описан подход к реализации формообразующего закона построения контура нулевой границы (нуль-контура) объекта чертежа, обеспечивающего динамическое формирование R -функциональной предикатной функции твёрдотельного геометрического объекта. Рассматривается функция локального обнуления отрезка между заданными двумя точками. Обсуждаются принципы компьютерного конструирования контуров чертежа с применением последовательного построения функции нуль-контура из функций нуль-отрезков посредством применения функции локального обнуления. Алгоритм моделирования обеспечивает запоминание текущего состояния расчёта функции нуль-контура функционально-воксельной моделью для использования на следующем шаге R -функционального пересечения с новой функцией нуль-отрезка. Последовательное сохранение функционально-воксельных моделей позволяет осуществить возврат на предыдущие шаги проектирования. Такой подход обеспечивает построение поверхности нуль-контура в реализации цифровой 3D-модели посредством аналитического закона вращения. Разработанные средства можно рассматривать как дополнительный инструмент для решения задачи 3D-моделирования по плоским проекциям.

Ключевые слова: R -функция, проекция, функционально-воксельная модель, M -образ, закон вращения, функция локального обнуления, твёрдотельное моделирование.

Цитирование: Толок А.В., Толок Н.Б. Функция локального обнуления в геометрическом моделировании алгебраическими функциями. *Онтология проектирования*. 2026. Т.16, №3(61). С.454-464. DOI: 10.18287/2223-9537-2026-16-3-454-464.

Финансирование: Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».

Вклад авторов: Толок А.В. – принципы применения локальной геометрии в аналитическом моделировании геометрических объектов; Толок Н.Б. – практическая апробация принципов с компьютерной реализацией на примерах.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Введение

Алгебраические уравнения неявного вида для описания объектов $f(X_n) = 0$ формулируют закон формообразования нулевых точек в непрерывном пространстве – то есть задают правило, по которому в непрерывном пространстве значений возникают нулевые точки на поверхности объекта (прямая, плоскость, алгебраические кривые и поверхности). Компьютерная запись такой модели компактна и не ограничена размерностью пространства аргументов, но сложна в описании геометрического многообразия. Однако такая модель максималь-

но подходит для аналитических инженерных расчётов, поскольку точно описывает геометрию объекта на границе и внутри его тела, вместе с дифференциальными характеристиками.

Использование алгебраических функций в геометрическом моделировании было предложено в [1], где было показано формообразующее свойство аналитических уравнений. Такое моделирование открыло возможности применения точного описания геометрии объектов в многомерном пространстве (в дальнейшем получило обозначение *F-rep*).

Примерами символьно-графических редакторов, позволяющих наглядно проектировать сложные геометрические объекты функциональными конструкциями, могут служить открытые программные платформы *OpenCAD*¹ и *Antimony*². Оба приложения позволяют составлять описания математических конструкций из алгебраических функций с визуализацией результатов. Недостатком такого подхода является сложность применения полученных моделей в инженерных расчётах, т.к. математическая конструкция записана в структуре кода, имеет свой формат и формулируется громоздкими уравнениями. Графическое отображение является визуальным сопровождением процесса проектирования и не содействует описанию геометрических свойств объекта.

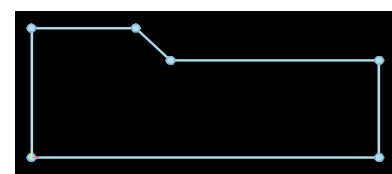
В частности, при работе с плоскими объектами в системе *Antimony* используются следующие базовые геометрические блоки: полилинии (из отрезков), задаваемые последовательным набором точек; плоские фигуры, представленные прямоугольниками, треугольниками, кругами и правильными многоугольниками (полигонами). В качестве примера работы этой системы показано построение контура, заданного набором точек (см. рисунок 1).

Поскольку данный контур не описывается алгебраическим законом формообразования, он не содержит геометрической информации о сформированном замкнутом объекте.

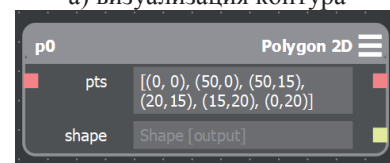
В [2, 3] предложена концепция точечного исчисления (ТИ) как предполагаемой основы для твёрдотельного компьютерного моделирования, где положение точки, принадлежащей объекту, задано параметрическим уравнением. Эта концепция развивает идеи параметрического описания кривых и поверхностей и потому неизбежно наследует как их достоинства, так и известные ограничения, связанные с сеточным заполнением геометрического тела.

Для твёрдотельного моделирования требуется подход, при котором объект задаётся алгебраическими функциями как единое непрерывное целое. Такая модель содержит не только точную геометрическую форму, но и дифференциальные характеристики, а при необходимости и локальные физические свойства (например, плотность, упругость и др.). Благодаря этому булевы операции и аналитические инженерные расчёты могут выполняться на уровне математического описания без потери точности.

Система рекурсивного анализа образных компонентов (*РАНОк*) [4] базируется на компиляции формул и сохранении задаваемой области функции в виде пяти трёхмерных массивов (М-образов). Каждый М-образ содержит для рассчитанных точек дискретной области трёхмерное скалярное поле значений соответствующей компоненты однородного вектора единичной нормали $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$. Совокупность М-образов для каждой точки дискретной области позволяет собрать *локальную функцию* неявного вида



а) визуализация контура



б) описание в виде набора точек

Рисунок 1 – Построение контура в системе *Antimony*

¹ *OpenCAD* – открытая система автоматизированного проектирования (САПР) для параметрического создания твердотельных трёхмерных объектов. <https://openscad.org/>.

² *Antimony* – САПР, в которой программное обеспечение для САПР развилось на основе Лисп-машин, а не чертёжных столов. <https://www.mattkeeter.com/projects/antimony/3/>.

$$n_1x + n_2y + n_3z + n_4u + n_5 = 0. \quad (1)$$

Локальная функция полностью заменяет в точке конструкцию из функций, описывающих геометрический объект. Точки М-образов кодируются цветом (графически):

$$M_i = \frac{(n_i + 1)P}{2}, P = 256^3 - \text{количество градаций цвета}, \quad (2)$$

которые представляют значения коэффициентов n_i локальной функции (1).

Метод такого представления данных получил название функционально-воксельный (ФВ-модель), где под вокселем подразумевается цвет в многомерном пространстве [5]. Это представление области функции переводит геометрическое моделирование на уровень локальной компьютерной геометрии (ЛКГ), основанной на угловой метрике, где длины, площади и объёмы вычисляются посредством интегрирования угловых компонент. Геометрические преобразования (сдвиг, поворот, масштабирование), в отличие от координатных моделей, определяются пересчётом компонентных значений однородного единичного вектора в точке. Координаты точки на задаваемой области определяют пространственную привязку компонент единичного вектора и не влияют на геометрические характеристики объекта. Переход к угловой метрике увеличивает объём необходимой для компьютера информации для оценки геометрических и физических свойств объекта средствами математического анализа.

В работе [6] рассмотрена задача применения проекционных аналитических функций в построении цифровой 3D-модели по чертежу. ЛКГ позволяет получить необходимую геометрическую информацию в дискретно-аналитическом представлении локальными функциями с непрерывным заполнением тела.

Рассмотрению подлежит задача построения функции нулевой границы (нуль-контура чертежа) с заполнением остального рассматриваемого пространства аргументов (в данном случае на плоскости xOy) локальными функциями неявного вида

$$n_1x + n_2y + n_3z + n_4 = 0. \quad (3)$$

Положительные значения z локальных функций (3) располагаются внутри контура, а отрицательные значения z – снаружи. Такое представление функции в R -функциональном моделировании принято называть предикатным, т.е. различающимся по признаку состояния знака её значения [7-9]. Для построения R -функциональной последовательности вычислений применяется специальный компилятор формул.

ЛКГ построена на принципах дифференциального аналитического моделирования с использованием функционально-воксельной модели для компьютерного представления [10-12].

Принципы построения пространства локальных функций изложены в работе [5] и используются в данной статье при описании функции локального обнуления (*FLOZ* – *Function of Local Zeroing*) [13,14].

1 Постановка задачи

Под *FLOZ* понимается алгебраическая функция или конструкция из алгебраических функций, позволяющая формировать из нулевых значений некоторый геометрический сегмент на заданной области.

В [14] *FLOZ* задаётся следующей конструкцией, состоящей из уравнений расстояния между точками $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и текущей точкой $P(x, y)$, заданной на области:

$$\begin{aligned} z_{FLOZ} &= d_1 + d_2 - d, \\ d &= \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}, \\ d_1 &= \sqrt{(y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2}, \\ d_2 &= \sqrt{(y - y_2)^2 + (x - x_2)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

При построении отрезка нулевых значений (4) квадратично уменьшается значение z_{FLOZ} при приближении к нуль-отрезку [13]. При этом не удаётся получить линейчатую поверхность, более чётко формирующую отрезок в каждой его точке.

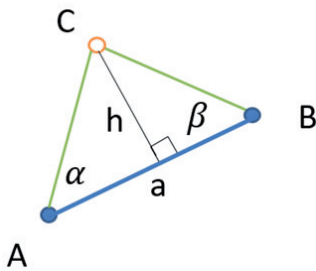


Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация FLOZ

Предлагается воспользоваться формулировкой определения расстояния от произвольной точки C на плоскости до прямой, заданной отрезком AB (см. рисунок 2). Это расстояние равно высоте h треугольника $\triangle ABC$, образуемого точкой C и отрезком AB . В первом случае, если углы α и $\beta \leq 90^\circ$:

$$h = \frac{(y_A - y_B)x_C - (x_A - x_B)y_C + (x_A y_B - x_B y_A)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}. \quad (5)$$

Во втором случае α или $\beta > 90^\circ$. При этом применяется следующая формулировка условий:

$$\begin{cases} \alpha > 90^\circ \rightarrow h = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}; \\ \beta > 90^\circ \rightarrow h = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Следуя принципам ЛКГ, получается обобщённая локальная функция вида:

$$l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4 = 0. \quad (7)$$

Функция вычисления расстояния до отрезка, согласно (5), представляется линейчатой поверхностью z :

$$z = \frac{(y_A - y_B)x - (x_A - x_B)y + (x_A y_B - x_B y_A)}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}. \quad (8)$$

Для вычисления первого коэффициента локальной функции достаточно получить частную производную по аргументу x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{y_A - y_B}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = l_1. \quad (9)$$

Второй коэффициент локальной функции является частной производной по аргументу y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{x_A - x_B}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = l_2. \quad (10)$$

Третий коэффициент l_3 равен единице, поскольку соответствует производной по аргументу z , а четвёртый выражается через локальную функцию (7):

$$l_4 = -l_1 x - l_2 y - l_3 z, \quad (11)$$

где z вычисляется по (8).

Аналогичным образом вычисляются коэффициенты для рассмотренного случая с тупыми углами:

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha > \pi/2 \rightarrow l_1 &= - \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}}, \\ l_2 &= - \frac{y - y_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}}, l_3 = 1, \\ z &= \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}, \quad l_4 = -l_1 x - l_2 y - l_3 z, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{при } \beta > \pi/2 \rightarrow l_1 &= - \frac{x - x_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}}, \\ l_2 &= - \frac{y - y_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}}, l_3 = 1, \\ z &= \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}, \quad l_4 = -l_1 x - l_2 y - l_3 z. \end{aligned} \quad (13)$$

Алгоритм вычисления $FLOZ$ можно представить следующей записью:

если $\left(\alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, то формулы (8 – 11);

в противном случае $\left\{\text{если } \left(\alpha \geq \frac{\pi}{2}\right), \text{ то формула (12); если } \left(\beta \geq \frac{\pi}{2}\right), \text{ то формула (13)}\right\}$.

Из постановки следует, что значения z полученной функции всегда будут положительными, и это противоречит принципам R -функционального моделирования, где предусматривается пересечение или объединение положительных или отрицательных областей. Для построения сложного контура это является удобным, поскольку исключает эффект «отсечения» выстраиваемой положительной области объекта при процедуре пересечения с новым направлением отрезка контура. На рисунке 3 показано графическое представление полученной $FLOZ$ для заданных точек в виде четырёх М-образов ФВ-модели, цвет которых кодируется согласно (2) с предварительным нормированием полученных l_i :

$$n_i = \frac{l_i}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}}. \quad (14)$$

Сохранение последовательности ФВ-моделей на каждом этапе построения сложного нуля-контура посредством наращивания вычисляемых $FLOZ$ оператором конъюнкции [1] позволяет получить сценарий для возможного возврата на один или несколько шагов расчёта в процессе конструирования контура сложного чертежа.

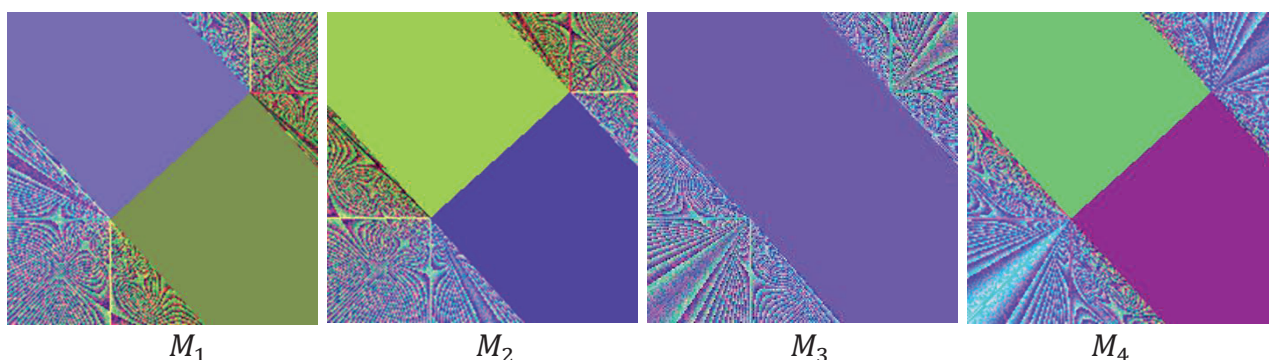


Рисунок 3 – Функционально-воксельная модель из четырёх М-образов

Если рассмотреть конъюнкцию для функций $z = z_1 + z_2 - \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, то можно заметить, что при любом из аргументов, равном нулю, обнуляется всё выражение.

На рисунке 4 представлено построение замкнутого нуля-контура посредством последовательных пересечений локальной функции $FLOZ$, задаваемой очередной точкой контура, с локальной функцией, получаемой из М-образов текущей ФВ-модели:

$$\begin{aligned} z^{(\text{ФВМ})} &= -l_1^{(\text{ФВМ})}x - l_2^{(\text{ФВМ})}y - l_4^{(\text{ФВМ})}, \\ z^{(FLOZ)} &= -l_1^{(FLOZ)}x - l_2^{(FLOZ)}y - l_4^{(FLOZ)}, \\ l_i^{(\text{ФВМ} \wedge FLOZ)} &= l_i^{(\text{ФВМ})} + l_i^{(FLOZ)} - \left(\frac{l_i^{(\text{ФВМ})}z^{(\text{ФВМ})} + l_i^{(FLOZ)}z^{(FLOZ)}}{\sqrt{(z^{(\text{ФВМ})})^2 + (z^{(FLOZ)})^2}} \right), \\ l_3^{(\text{ФВМ})} &= 1, i = 1, 2, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

В скобках указан вид локальной функции, к которой относится компонента l_i .

На рисунке 5 показана ФВ-модель для законченного построения выпуклого контура.

На рисунке 6 приведена последовательность построения замкнутого невыпуклого контура посредством операции пересечения локальной $FLOZ$, задаваемой последующей точкой контура с локальной функцией, получаемой из М-образов текущей ФВ-модели.

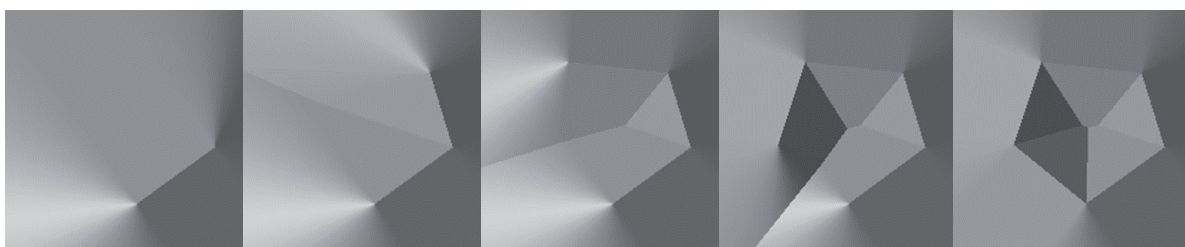


Рисунок 4 – Последовательность построения контура

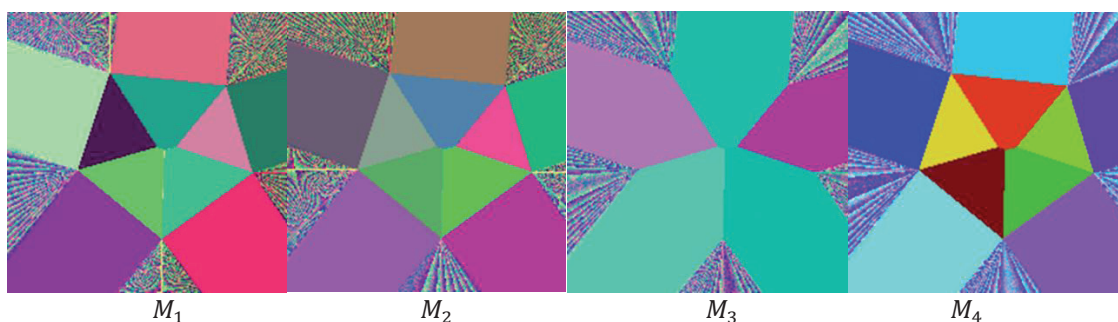


Рисунок 5 – Функционально-воксельная модель из четырёх М-образов, хранящая локальные функции описания выпуклого контура

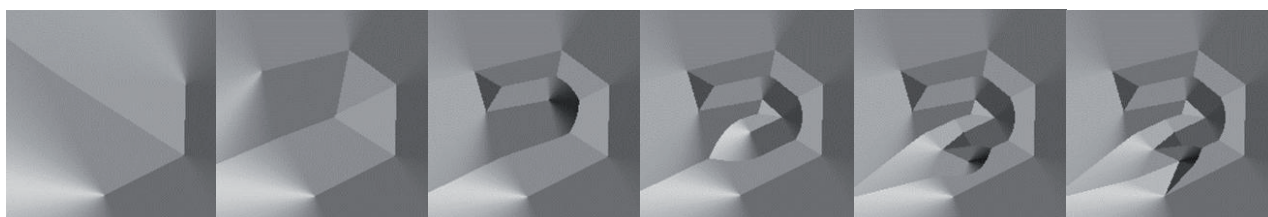


Рисунок 6 – Последовательность построения замкнутого невыпуклого контура

На рисунке 7 представлена ФВ-модель завершённого построения невыпуклого контура.

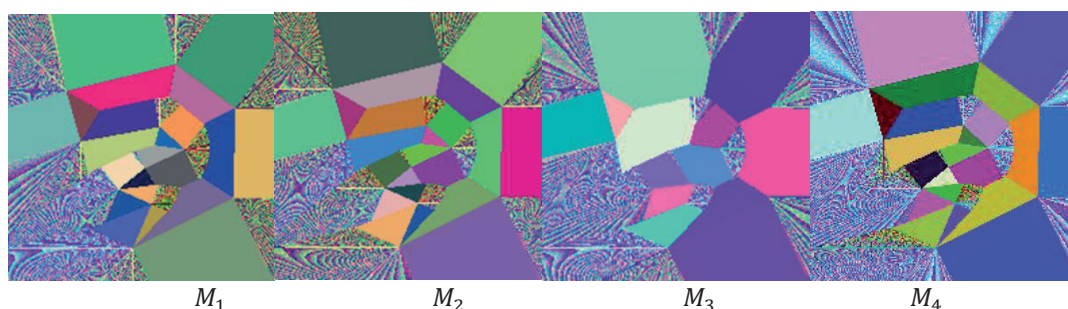


Рисунок 7 – Функционально-воксельная модель из четырёх М-образов, хранящая локальные функции описания невыпуклого контура

Пример построения контура по заданному чертежу (см. рисунок 8). Для вращения относительно оси Oz рисунок 8а повернут на 90^0 и обрезан вдоль этой оси (см. рисунок 8б).

Для организации вращения достаточно указать половину точек контура, расположенных справа (или слева) от оси. На рисунке 9 показово представлен процесс формирования объекта при последовательном указании характерных точек вдоль линии чертежа.

Для применения полученного контура в моделировании вращения необходимо задать область отрицательных значений локальной функции для внешних точек, не принадлежащих

объекту (см. рисунок 10). Для этого указывается любая точка вне контура и применяется алгоритм заливки, как показано на рисунке 10а.

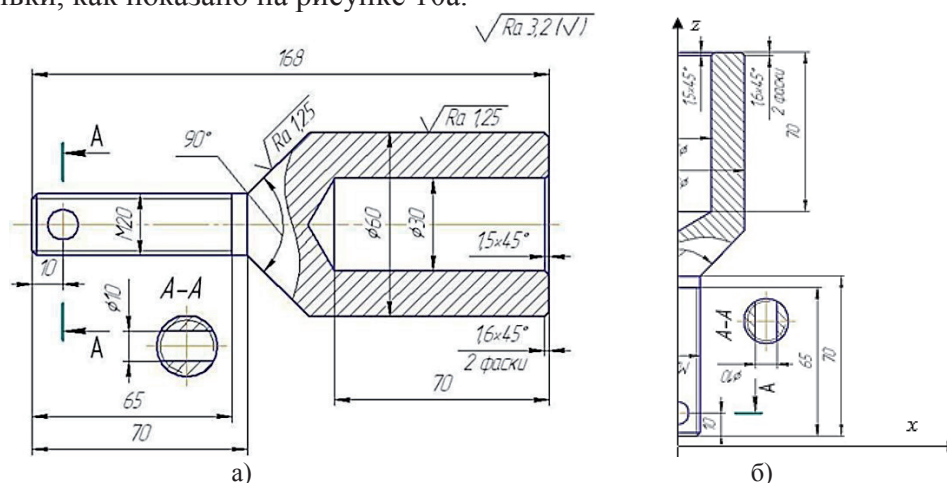


Рисунок 8 – Чертёж детали для построения фигуры вращения (пример)



Рисунок 9 – Построение контура по заданным точкам чертежа

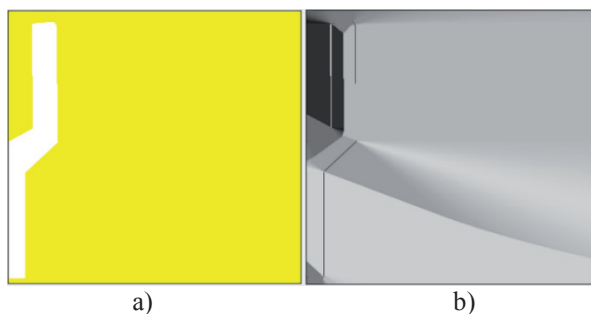


Рисунок 10 – Заливка (а) и инвертирование цвета (б) в зоне отрицательных значений локальной функции

Для получения отрицательного значения локальной функции в точках достаточно инвертировать цвет в этих точках М-образа (рисунок 10б). На рисунке 11 показан окончательный вариант ФВ-модели для применения функции вращения.

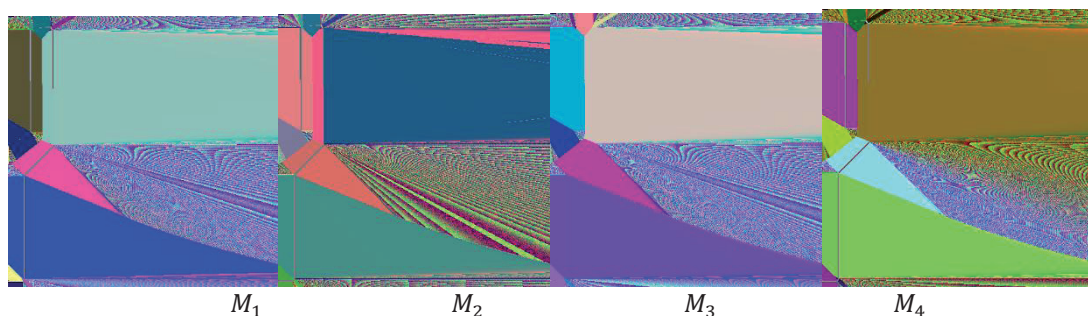


Рисунок 11 – Функционально-воксельная модель из четырёх М-образов, содержащая локальные функции описания контура вращения с учётом области отрицательных значений локальной функции

В работе [6] описан принцип построения трёхмерной ФВ-модели фигуры вращения. Он сводится к пересчёту плоской локальной функции $n_1x + n_3z + n_4u + n_5 = 0$, заданной в плоскости xOz , в локальную функцию $\left(|n_1| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)x + \left(|n_1| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)y + n_3z + n_4u + n_5 = 0$ с переходом в пространство $Oxyz$.

На рисунке 12 показана схема композиции из пяти М-образов, описывающих 3D-область аргументов локальной функции для детали, которая представлена в центре композиции.

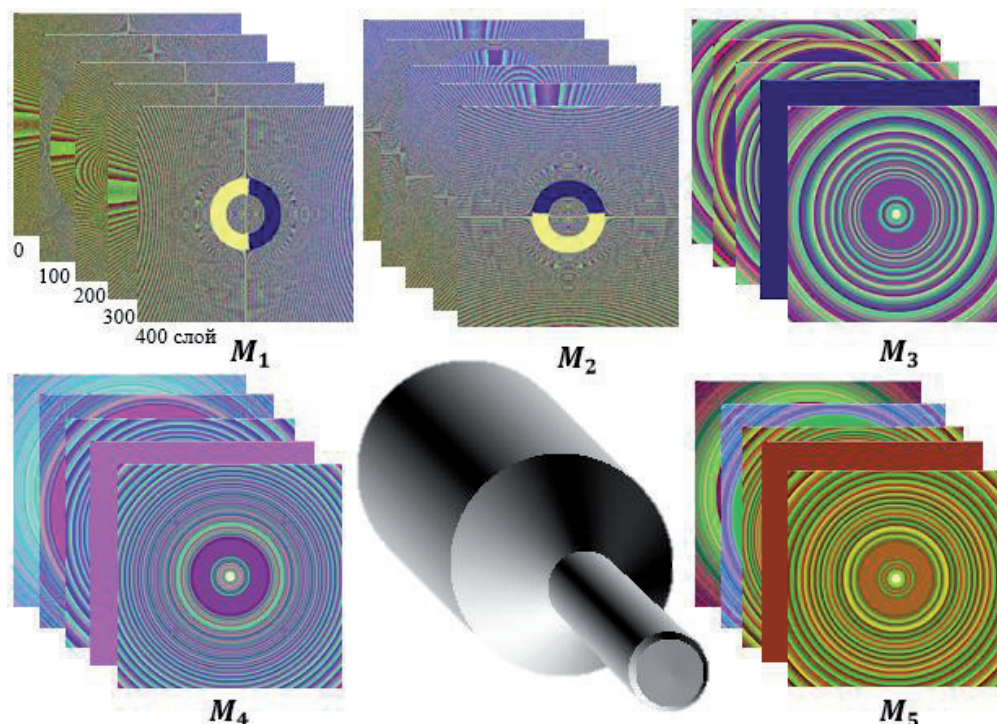


Рисунок 12 – Трёхмерная функционально-воксельная модель и результат построения фигуры вращения

Заключение

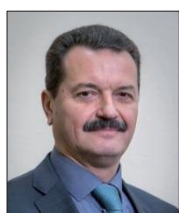
Принцип конструирования чертежа по его контуру с помощью *FLOZ* может быть положен в основу дальнейшего развития средств твёрдотельного моделирования. Данный подход, благодаря дифференциальному компьютерному представлению геометрии, позволит точно описывать объекты и их характеристики в процессе проектирования. Разработанный инструмент *FLOZ*, как генератор линейчатой поверхности с отрезком нулевых значений, упрощает создание аналитического представления проекции нулевых границ объекта для пространственного *R*-функционального моделирования. По такому же принципу может быть построена *FLOZ* для сегмента дуги, заданного двумя точками и радиусом, а также реализован алгоритм построения параметрической кривой, последовательно заполняемой нуль-отрезками.

Разработанные принципы моделирования позволяют свести трудоёмкую процедуру написания математических конструкций к стандартным процедурам проектировщика – указанию опорных точек, обеспечивая построение компьютерной модели, полностью соответствующей модели, описанной алгебраическими функциями.

Список источников

- [1] **Рвачев В.Л.** Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. Доклады Академии наук СССР. 1963. Т.153. №4. С.765–767.
- [2] **Бездитный А.А.** Точечное исчисление как онтологическая основа представления геометрических объектов в проектировании. *Онтология проектирования*. 2026. Т.16, №1(59), С.87-97. DOI: 10.18287/2223-9537-2026-16-1-87-97
- [3] **Конопацкий Е.В., Ротков С.И., Логанова М.В., Бессольнов М.В.** Подход к твердотельному моделированию геометрических объектов в точечном исчислении. *Онтология проектирования*. 2025. Т.15, №1(55), С.24-33. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-1-24-33
- [4] **Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И., Толлок А.В.** R-функции в аналитическом проектировании с применением системы "РАНОК". *Вестник МГТУ Станкин*. М.: МГТУ "Станкин", 2010. № 4. С.139-151.
- [5] **Толлок А.В., Толлок Н.Б.** Локальная компьютерная геометрия. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2025. 228 с.
- [6] **Толлок А.В., Толлок Н.Б.** Проекционный принцип построения функционально-воксельных моделей. *Онтология проектирования*. 2025. Т.15, №4. С.523-534. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-4-523-534
- [7] **Максименко-Шейко К.В.** R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
- [8] **Литвинова Ю.С., Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И.** Аналитическая идентификация трёхмерных геометрических объектов по информации о форме их сечений. *Проблемы машиностроения*. 2017. №1(20). С.45-51. EDN: YHXITN.
- [9] **Чопоров С.В., Лисняк А.А., Гоменюк С.И.** Использование функций В.Л. Рвачёва для геометрического моделирования областей сложной формы. *Прикладная информатика*. 2010. №2(26). С.109-122.
- [10] **Локтев М.А.** Особенности применения функционально-воксельного моделирования в задачах поиска пути с препятствиями. *Информационные технологии в проектировании и производстве*. 2016. №1. С.45-49.
- [11] **Лоторевич Е.А.** Принципы пространственной визуальной компоновки аналитических моделей, отображённых в воксельном графическом пространстве. *Технология машиностроения*. 2013. №11. С.59-63.
- [12] **Сычева А.А.** Функционально-воксельное моделирование кривых Безье. *Геометрия и графика*. 2021. Т.9, №4. С.63-72.
- [13] **Локтев М.А., Разумовский А.И., Сычева А.А., Харланова П.М.** Функционально-воксельное моделирование кривой Безье. *Перспективы науки*. 2020. №11(134). С.196-198.
- [14] **Tolok A.V., Tolok N.B.** Local R-Functional Modelling (LRFM) / Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021; Nizhny Novgorod, Russia). Н. Новгород: CEUR Workshop Proceedings, 2021. Vol. 3027. С. <http://ceur-ws.org/Vol-3027/paper64.pdf>.

Сведения об авторах



Толлок Алексей Вячеславович, 1961 г. рождения. Окончил Горьковский инженерно-строительный институт им. В.П. Чкалова в 1984 г., к.т.н. (1992), д.т.н. (2004); профессор, заведующий лабораторией компьютерной графики ИПУ РАН. Научные интересы: функционально-воксельное моделирование в компьютерных технологиях, R-функциональное моделирование, САПР, системы управления, теория графов. Researcher ID (WoS): V-7594-2019, Author ID (Scopus): 28268055700, Author ID (РИНЦ): 452677. ORCID: 0000-0002-7257-9029, tolok_61@mail.ru. ✉



Толлок Наталия Борисовна, 1974 г. рождения. Окончила Московский технический университет связи и информатики в 1996 г., к.т.н. (2000); старший научный сотрудник ИПУ РАН. Научные интересы: функционально-воксельное моделирование в компьютерных технологиях, R-функциональное моделирование, математическое моделирование в экономике. Researcher ID (WoS): AAI-3684-2021, Author ID (Scopus): 57193099901, Author ID (РИНЦ) 452678. ORCID: 0000-0002-5511-4852. SPIN-код: 8581-0422, nat_tolok@mail.ru.

Поступила в редакцию 02.02.2026, после рецензирования 17.06.2026. Принята к публикации 25.06.2026.



Local zeroing function in geometric modeling with algebraic functions

© 2026, A.V. Tolok ✉, N.B. Tolok

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract

An interactive principle of geometric modeling with algebraic functions is considered for the automated construction of a spatial solid digital model from two-dimensional drawings. The application of R-functional modeling to the description of complex geometric contours defined by drawings using algebraic functions has two major drawbacks: the difficulty of constructing a zero contour from specified points in a drawing and the high computational cost associated with compiling formulas for computer calculations. This paper describes an approach to implementing a shape-generation law for constructing the zero-boundary contour (zero contour) of a drawing object, which enables the dynamic generation of an R-functional predicate function for a solid geometric object. A local zeroing function for a line segment defined by two specified points is considered. The principles of computer-aided construction of drawing contours are discussed, based on the sequential construction of a zero-contour function from zero-segment functions using the local zeroing function. The modeling algorithm stores the current state of the zero-contour function computation in a functional-voxel model for use at the subsequent step of R-functional intersection with a new zero-segment function. Sequential storage of functional-voxel models makes it possible to return to previous design steps. This approach enables the construction of a zero-contour surface in a digital 3D model using an analytical law of rotation. The developed tools can be considered an additional means of solving the problem of 3D modeling from two-dimensional projections.

Keywords: *R-function, projection, functional-voxel model, M-image, law of rotation, local zeroing function, solid modeling.*

For citation: Tolok AV, Tolok NB. Local zeroing function in geometric modeling with algebraic functions [In Russian]. *Ontology of Designing*. 2026; 16(3): 454-464. DOI: 10.18287/2223-9537-2026-16-3-454-464.

Financial Support: The research was carried out within the framework of the scientific program of the National Center for Physics and Mathematics, direction No.9 “Artificial intelligence and big data in technical, industrial, natural and social systems.”

Authors' contributions: Tolok A.V. – principles of applying local geometry to the analytical modeling of geometric objects; Tolok N.B. – practical validation of the principles and their computer implementation using illustrative examples.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

List of figures

- Figure 1 – Contour construction in the Antimony system
- Figure 2 – Geometric interpretation of the local zeroing function (FLOZ)
- Figure 3 – Functional-voxel model composed of four M-images
- Figure 4 – Sequence of contour construction
- Figure 5 – Functional-voxel model composed of four M-images storing local functions describing a convex contour
- Figure 6 – Sequence of constructing a closed non-convex contour
- Figure 7 – Functional-voxel model composed of four M-images storing local functions describing a non-convex contour
- Figure 8 – Drawing of a part for constructing a figure of revolution (example)
- Figure 9 – Contour construction from specified drawing points
- Figure 10 – Filling (a) and color inversion (b) in the region of negative values of the local function
- Figure 11 – Functional-voxel model composed of four M-images containing local functions describing the contour of revolution with allowance for the region of negative values of the local function
- Figure 12 – Three-dimensional functional-voxel model and the resulting solid of revolution

References

- [1] **Rvachev VL.** On the Analytical Description of Some Geometric Objects [In Russian]. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1963; 153(4): 765–767.
- [2] **Bezditny AA.** Point Calculus as an Ontological Basis for Representing Geometric Objects in Design [In Russian]. *Ontology of Designing*. 2026; 16(1): 87–97. DOI: 10.18287/2223-9537-2026-16-1-87-97.
- [3] **Konopatsky EV, Rotkov SI, Logunova MV, Bessolnov MV.** An Approach to Solid Modeling of Geometric Objects in Point Calculus [In Russian]. *Ontology of Designing*. 2025; 15(1): 24–33. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-1-24-33.
- [4] **Maksimenko-Sheiko KV, Sheiko TI, Tolok AV.** R-functions in analytical design using the RANOK system [In Russian]. *Bulletin of MSTU Stankin*. 2010; 4: 139–151.
- [5] **Tolok AV, Tolok NB.** Local computer geometry [In Russian]. Moscow: IPR Media, 2025. 228 p.
- [6] **Tolok A.V., Tolok N.B.** Projection principle for constructing functional-voxel models [In Russian]. *Ontology of Designing*. 2025; 15(4): 523–534. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-4-523-534.
- [7] **Maksimenko-Sheiko KV.** R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields [In Russian]. Kharkov: IPME NAS of Ukraine, 2009. 306 p.
- [8] **Litvinova YuS, Maksimenko-Sheiko KV, Sheiko TI.** Analytical identification of three-dimensional geometric objects based on information about the shape of their sections [In Russian]. *Problems of mechanical engineering*. 2017; 1(20): 45–51. EDN: YHXITN.
- [9] **Choporov SV, Lisnyak AA, Gomenyuk SI, Using VL.** Rvachev functions for geometric modeling of complex-shaped areas [In Russian]. *Applied Informatics*. 2010; 2(26): 109–122.
- [10] **Loktev MA.** Features of the application of functional-voxel modeling in problems of finding a path with obstacles [In Russian]. *Information Technologies in Design and Production*. 2016; 1: 45–49.
- [11] **Lotorevich EA.** Principles of spatial visual layout of analytical models displayed in voxel graphic space [In Russian]. *Mechanical Engineering Technology*. 2013; 11: 59–63.
- [12] **Sycheva AA.** Functional-voxel modeling of Bezier curves [In Russian]. *Geometry and Graphics*. 2021; 9(4): 63–72.
- [13] **Loktev MA, Razumovsky AI, Sycheva AA, Kharlanova PM.** Functional-voxel modeling of the Bezier curve [In Russian]. *Prospects for Science*. 2020; 11(134): 196–198.
- [14] **Tolok AV, Tolok NB.** Local R-Functional Modelling (LRFM). *Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021; Nizhny Novgorod, Russia)*. CEUR Workshop Proceedings, 2021. Vol.3027. <http://ceur-ws.org/Vol-3027/paper64.pdf>.

About the authors

Aleksey Vyacheslavovich Tolok (b. 1961) graduated from the Gorky Civil Engineering Institute named after V.P. Chkalov in 1984, Candidate of Technical Sciences (1992), Doctor of Technical Sciences (2004); Professor, Head of the Computer Graphics Laboratory at the Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences. Research interests include functional-voxel modeling in computer technologies, R-functional modeling, CAD, control systems, and graph theory. Researcher ID (WoS): V-7594-2019, Author ID (Scopus): 28268055700, Author ID (РИНЦ): 452677. ORCID: 0000-0002-7257-9029, tolok_61@mail.ru. ✉

Natalia Borisovna Tolok (b. 1974) graduated from the Moscow Technical University of Communications and Informatics in 1996, Candidate of Technical Sciences (2000); Senior Researcher at the Institute of Control Systems of the Russian Academy of Sciences. Research interests include functional-voxel modeling in computer technology, R-functional modeling, and mathematical modeling in economics. Researcher ID (WoS): AAI-3684-2021, Author ID (Scopus): 57193099901, Author ID (РИНЦ) 452678. ORCID: 0000-0002-5511-4852. SPIN-код: 8581-0422, nat_tolok@mail.ru.

Received February 02, 2026, Revised June 17, 2026. Accepted June 25, 2026.