



Рациональное проектирование нагруженных изгибающим моментом конструкций с учётом требований прочности и устойчивости

© 2026, А.В. Болдырев, Д.В. Золотов ✉

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Предлагается методика проектирования нагруженных изгибающим моментом конструкций минимальной массы с учётом ограничений на напряжения и критические усилия потери устойчивости. Переменными проектирования являются параметры силовой схемы, размеры и форма сечений конструктивных элементов. На первом этапе в заданной проектной области выполняется проектирование силовой схемы конструкции по условиям прочности с использованием континуальной модели – пластины переменной толщины. На втором этапе определяется граница выреза в конструкции стохастическим методом дифференциальной эволюции при выполнении условий прочности. На третьем этапе разрабатывается конструкция переменного сечения с учётом требований прочности и устойчивости. Обсуждаются ситуации, возникающие при проектировании рассматриваемой конструкции, требующие принятия решений на основе анализа чувствительности ограничений по устойчивости. Выявлена проектная ситуация, в которой удаление из конструкции элементов с высокими значениями энергии деформации по критической форме потери устойчивости приводит к снижению массы конструкции. На примере показана возможность получить конструкцию с переменной строительной высотой, удовлетворяющую условиям прочности и устойчивости, при снижении массы на 17% по сравнению с конструкцией с постоянной строительной высотой.

Ключевые слова: проектирование, конструкция, оптимизация, изгибающий момент, требование прочности, требования устойчивости, коэффициенты чувствительности, принятие решений.

Цитирование: Болдырев А.В., Золотов Д.В. Рациональное проектирование нагруженных изгибающим моментом конструкций с учётом требований прочности и устойчивости. *Онтология проектирования*. 2026. Т.16, №3(61). С.528-538. DOI: 10.18287/2223-9537-2026-16-3-528-538.

Вклад авторов: Болдырев А.В. – разработка структуры статьи, анализ проектных ситуаций; Золотов Д.В. – разработка методики проектирования, расчёты и анализ результатов.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Введение

В качестве объектов проектирования рассматриваются конструкции, предназначенные для уравнивания изгибающего момента. Такие конструкции широко используются в строительстве, судостроении, железнодорожном транспорте, аэрокосмической технике и других предметных областях. Традиционным решением для восприятия изгибающего момента является балка с постоянной строительной высотой двутаврового сечения. В работе [1] при проектировании силовой схемы балочной конструкции показано, что распределение материала в равнопрочной пластине переменной толщины соответствует балке переменного сечения. Полученное распределение материала отражает возможные геометрические области рационального расположения элементов конструкции – поясов и стенки балки.

В работе [2] предлагается метод оптимизации тонкостенных балок. Особенностью метода является параметризация сечения в виде набора связанных линейных сегментов, что позволяет использовать алгоритмы, предназначенные для оптимизации ферм. Для линейно-упругого анализа применяется метод конечных полос, который снижает вычислительные за-

траты по сравнению с подходом [3]. В статье [4] предлагается развитие метода топологической оптимизации [3], где рассматриваются ограничения по прочности и жёсткости балки, анализ чувствительности выполняется с использованием метода сопряжённых уравнений.

В исследовании [5] представлены результаты экспериментальных испытаний двутавровых балок с линейно изменяющейся строительной высотой на устойчивость конструкции.

В работе [6] используется безразмерный критерий весовой эффективности конструкций, нагруженных изгибающим моментом. В качестве характерной нагрузки принимается эквивалентная моменту пара сил. Определена область отношений длины к строительной высоте балки переменного сечения, при которых возможны конструктивные решения с большей весовой эффективностью, чем балка с постоянной строительной высотой. В статье [7] такой подход применён для проектирования центроплана магистрального самолета, включающего балки переменной строительной высоты. В работах [6, 7] используется критерий «силовой фактор» [8, 9].

1 Постановка задачи

Геометрические характеристики проектной области представлены на рисунке 1. Нагружение конструкции – пластины постоянной толщины – осуществляется изгибающим моментом, заданным двумя парами сил P . Целевой функцией является масса конструкции m_k .

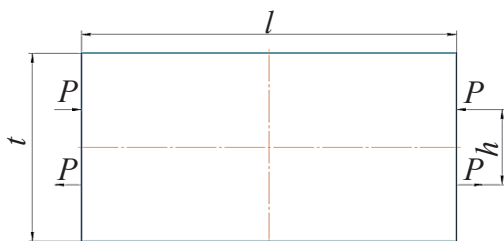


Рисунок 1 – Геометрические характеристики проектной области

Определяются следующие характеристики: количество и тип конструктивных элементов, их расположение и типы соединения между собой; форма и размеры сечений конструктивных элементов. В качестве функциональных ограничений учитываются условия прочности в каждом элементе; условия местной и общей устойчивости конструкции.

На начальной стадии проектирования применяется континуальная модель, непрерывно заполняющая заданную проектную область [10]. Для поиска рациональной силовой схемы конструкции применяется подход, заключающийся в минимизации в проектной области силового фактора G [9]:

$$G = \int_V \sigma^{\text{экв}} dV, \quad (1)$$

где $\sigma^{\text{экв}}$ – эквивалентные напряжения, действующие в конструкции; V – объём конструкции.

Эквивалентные напряжения по условию текучести Генки-Губера-Мизеса для пластинчатых элементов определяются:

$$\sigma^{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad (2)$$

где σ_1, σ_2 – главные напряжения.

Масса конструкции на этом этапе прогнозируется по формуле [9]:

$$m_k = \varphi \rho \frac{G}{\sigma}, \quad (3)$$

где φ – коэффициент полной массы, определяемый как отношение массы конструкции к теоретически необходимой массе силового материала; ρ и σ – плотность и допускаемое напряжение конструкционного материала.

Коэффициент φ определяет долю массы конструкции, которая не известна на начальных этапах проектирования конструкции и не учитывается в модели. Эту дополнительную массу могут составлять элементы, обусловленные технологическими особенностями производства,

несиловые, поддерживающие и крепёжные детали. Для агрегатов авиационных конструкций коэффициент φ , как правило, принимает значение около $\varphi = 2$ [11, 12]. Для балочной конструкции прирост дополнительной массы могут дать подкрепляющие элементы, обеспечивающие её устойчивость.

На ранних стадиях проектирования для оценки массы конструкции удобно использовать безразмерный коэффициент силового фактора C_k [13]:

$$C_k = \frac{G}{RL}, \quad (4)$$

где R и L – характерная нагрузка и характерный размер конструкции.

В работах [6, 7] для балочной конструкции в качестве характерной нагрузки R принимается пара сил $2P$, за характерный размер L – длина передачи изгибающего момента l (рисунок 1). Показано, что для балки с постоянной строительной высотой $C_k = 1$; для балки переменной строительной высотой при условии $C_k < 1$ возможно существование технического решения с массой конструкции меньшей, чем у балки с постоянной строительной высотой.

Учёт устойчивости конструкции на более поздних этапах проектирования производится путём решения задачи о собственных значениях [14]:

$$([K] - \eta_j [K_G])\{W_j\} = \{0\}, \quad (5)$$

где $[K]$ – матрица жёсткости конструкции; $[K_G]$ – матрица геометрической жёсткости, зависящая от формы упругой системы и распределения в ней внутренних усилий при действии нагрузки $\{P\}$; $\{W_j\}$ – собственный вектор формы потери устойчивости, связанный с j -м собственным значением η_j .

Задачу (5) можно представить в виде:

$$\eta_j = \frac{\{W_j\}^T [K] \{W_j\}}{\{W_j\}^T [K_G] \{W_j\}}, \quad (6)$$

Значение критической нагрузки потери устойчивости конструкции по вектору $\{W_j\}$ можно выразить как:

$$\{P_j\} = \eta_j \{P\}. \quad (7)$$

Критическим является наименьшее (первое) собственное значение η_1 .

2 Методика решения

Предлагаемый подход основывается на применении континуальной пластины переменной толщины [1] с последующей параметрической оптимизацией элементов конструкции. Декомпозиция задачи проектирования позволяет выделить следующие этапы.

- 1) *определяется конструктивно-силовая схема*. Разрабатывается конечно-элементная модель (КЭМ-1) проектной области (см. рисунок 1). Оптимизация распределения материала в КЭМ-1 по условиям прочности без учёта требований устойчивости и технологических требований позволяет сформировать теоретически оптимальную конструкцию (ТОК). Оптимизация выполняется по алгоритму [1] с использованием [15]. На основе анализа силовой работы ТОК определяется количество и тип силовых элементов.
- 2) *разрабатывается КЭМ-2*, которая представляется как комбинированная упругая система, состоящая из стенки, моделируемой мембранными элементами, работающими в плоском напряжённом состоянии, и поясов – стержневых элементов, воспринимающих осевые усилия. Определяется граница выреза в стенке по условиям прочности.
- 3) *разрабатывается КЭМ-3*, состоящая из объёмных элементов и двухмерных изгибно-мембранных элементов [16]. Определяются: граница выреза в стенке по условиям проч-

ности и устойчивости; параметры стыковых и подкрепляющих элементов; размеры и форма сечений конструктивных элементов.

2.1. Определение конструктивно-силовой схемы

Целевой функцией является силовой фактор G , определяемый по соотношениям (1), (2).

В качестве проектных переменных принимаются толщины в конечных элементах пластины δ_i ($i = 1, 2, \dots, n_1$), где n_1 – количество элементов в КЭМ-1.

Для анализа силовой работы ТОК используются картины потоков главных усилий (ПГУ) [1, 11]. В результате принимается решение по выбору параметров силовой схемы конструкции. В ТОК элементы с большими значениями толщины пластины, в которых материал работает в одноосном напряжённом состоянии, могут трактоваться как пояса балки; элементы ТОК с меньшими значениями толщин пластины, испытывающие двухосное напряжённое состояние, – как стенка балки.

2.2. Определение границы выреза в стенке по условиям прочности

Внутри проектируемой конструкции в зонах с исчезающе малой толщиной элементов возможен вырез. В КЭМ-2 принимается начальная граница выреза, по которой из конструктивных соображений располагаются стержневые элементы. Граница выреза корректируется с использованием стохастического метода дифференциальной эволюции [17].

Целевой функцией является силовой фактор G .

В качестве проектных переменных принимаются координаты узлов на границе выреза y_i ($i = 1, 2, \dots, n_2$), где n_2 – количество узлов на границе выреза в КЭМ-2.

2.3. Разработка конструкции с учётом требований прочности и устойчивости

В качестве проектных переменных используются толщины в изгибно-мембранных элементах $\delta_i^{(e)}$ ($i = 1, 2, \dots, n_3$), где n_3 – количество изгибно-мембранных элементов в КЭМ-3.

Для учёта технологических требований используется приём представления конструкции в виде совокупности подконструкций. Объединение в подконструкции осуществляется на основе линейных связей:

$$\{\delta\} = [H]\{\delta_i^{(e)}\}, \quad \{\delta\} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_4}\}, \quad n_4 < n_3 \quad (8)$$

где $[H]$ – булева матрица связи; n_4 – количество подконструкций.

В каждую подконструкцию включаются элементы с примерно одинаковой толщиной $\delta_i^{(e)}$, и это условие сохраняется в процессе оптимизации. Границы варьирования проектных переменных задаются следующими условиями:

$$\delta_i^{(min)} \leq \delta_i^{(e)} \leq \delta_i^{(max)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n_3), \quad (9)$$

где $\delta_i^{(min)}$ и $\delta_i^{(max)}$ – минимальные и максимальные значения i -ой проектной переменной, обусловленные конструктивно-технологическими требованиями.

Целевая функция – масса конструкции:

$$m_k(\delta) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Функциональные ограничения $g_j(X)$ представляются так:

$$g_j(\delta) = \sigma_j^{\text{ЭКВ}} - \sigma \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n_3), \quad (11)$$

$$g_j(\delta) = \bar{\eta} - \eta_1 \leq 0, \quad (j = n_3 + 1), \quad (12)$$

где $\bar{\eta}$ – допускаемое значение величины η_1 (обычно $\bar{\eta} = 1$).

Для решения задачи (8)–(12) используется подход, предложенный в [14] на основе концепции равнопрочности и анализа коэффициентов чувствительности $\partial \eta_j / \partial \delta_i$, учитывающих энергию деформации по соответствующей форме потери устойчивости.

2.4. Валидация конечно-элементного моделирования

Рассматривается задача анализа устойчивости центрально сжатой балки длиной $l_6 = 1000$ мм с двутавровым поперечным сечением (см. рисунок 2). Характеристики конструкционного материала: модуль упругости $E = 70,000$ Мпа, коэффициент Пуассона $\nu_a = 0,33$, плотность $\rho = 2700$ кг/м³, допускаемое напряжение $\sigma = 340$ Мпа.

Критическая сжимающая нагрузка для балки определяется по формуле Эйлера [18] и используется как эталон для оценки достоверности КЭМ:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_a J_{min}}{(\mu l_6)^2} = \frac{\pi^2 \times 70 \times 10^9 \times 2,1341 \times 10^{-8}}{(2 \times 1)^2} = 3686 \text{ Н}, \quad (13)$$

где $\mu=2$ – коэффициент приведения длины для заделки;

$$J_{min} = \frac{96 \times 1^3}{12} + 2 \times \left(\frac{2 \times 40^3}{12} \right) = 21341 \text{ мм}^4 \text{ – минимальный момент инерции балки.}$$

Результаты вычислительного эксперимента сеточной сходимости КЭМ балки приведены на рисунке 3, где n_3 – число конечных элементов вдоль длины балки. Вдоль высоты балки в моделях используется $n_3/10$ конечных элементов. Погрешность определения η_1 для балки с помощью МКЭ составляет менее 1%, что подтверждает достоверность моделирования.



Рисунок 2 – Поперечное сечение балки

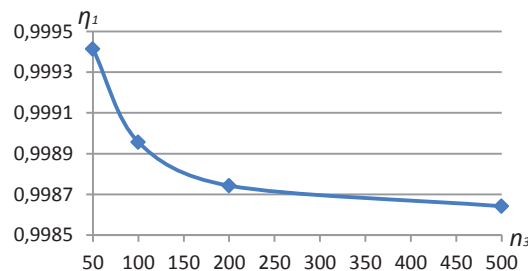


Рисунок 3 – Сеточная сходимость КЭМ

3 Пример

Конечно-элементное моделирование конструкции осуществлялось в программной среде *Femap* [16]. Для оптимизации распределения материала в пластинах, оболочках и стержнях использована программа [15]. В качестве критерия останова итераций использована сходимость вычислительного процесса по значениям проектных переменных. Вычислительный процесс прекращался, когда изменение толщин всех элементов КЭМ на следующей итерации относительно предыдущей составляло менее 1%.

Принятые значения параметров проектной области (см. рисунок 1): $l = 4000$ мм, $h = 800$ мм, $P = 250$ кН. Характеристики конструкционного материала приведены в разделе 2.4.

Результаты оптимизации распределения материала после 15 итераций по алгоритму [1] в континуальной модели приведены на рисунке 4.

Картина ПГУ, показанная на рисунке 5, согласуется с результатами, полученными в работе [1], и указывает на возможность снижения массы конструкции за счёт перехода от балки с постоянной строительной высотой к балке с переменной строительной высотой. Анализ распределения одноосных потоков усилий в проектной области позволяет идентифицировать наличие и расположение в силовой схеме конструкции внешних, внутренних и боковых поясов (см. рисунок 6).

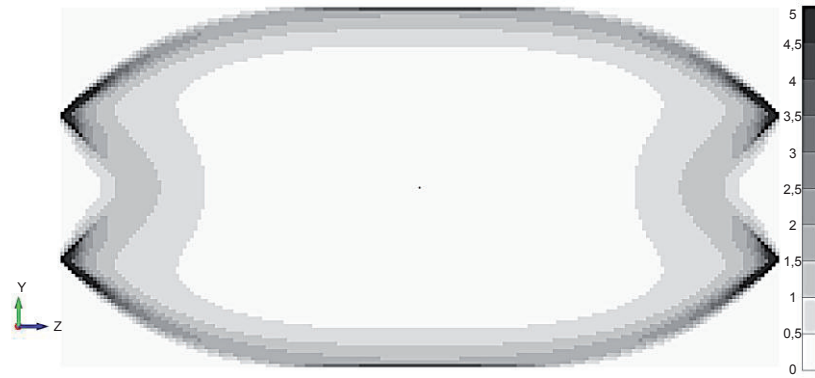


Рисунок 4 – Распределение толщин [мм] в континуальной модели

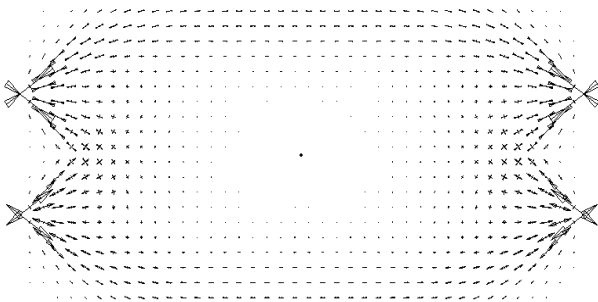


Рисунок 5 – Картина ПГУ в ТОК

Получена ТОК с коэффициентом силового фактора $C_k=0,832$, массой $m_k=13,219$ кг, силовым фактором $G=1,663 \times 10^6$ кН*мм.

Граница выреза, определённая с помощью метода дифференциальной эволюции, представлена на рисунке 6. Для оптимизации формы контура выреза в КЭМ-2 потребовалось 483 итерации. Длительность расчёта составила около 1 часа (для шестиядерного двенадцатипоточного процессора с базовой частотой 3,5 ГГц); использованная оперативная память объёмом 1,8 ГБ (эффективная частота 2,7 ГГц).

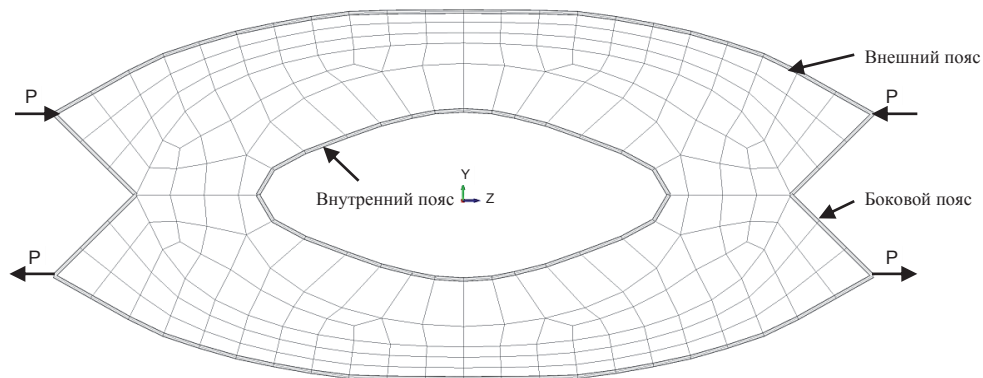


Рисунок 6 – КЭМ-2 после оптимизации

КЭМ-3 показана на рисунке 7. Моделирование внешних, внутренних, боковых поясов и стенки конструкции производилось изгибно-мембранными конечными элементами, моделирование кронштейнов (см. элемент А на рисунке 7) – объёмными конечными элементами. Для оптимизации распределения материала в элементах конструкции по условиям прочности и устойчивости потребовалось 70 итераций алгоритма [14], длительность расчёта составила 2,5 часа (для шестиядерного двенадцатипоточного процессора с базовой частотой 3,5 ГГц) при использовании 8 ГБ оперативной памяти с эффективной частотой 2,7 ГГц. Полученная в результате оптимизации силовая схема конструкции показана на рисунке 8. Весовая сводка спроектированной конструкции представлена в таблице 1.

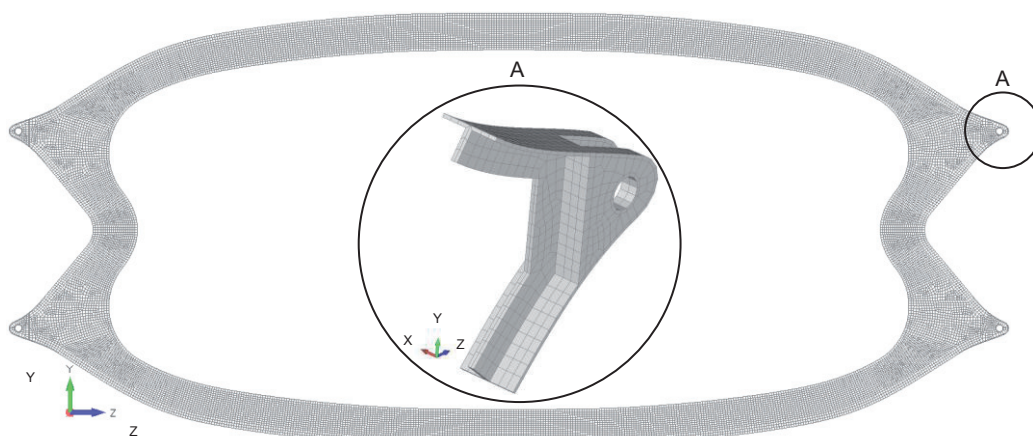


Рисунок 7 – КЭМ-3 и КЭМ кронштейна

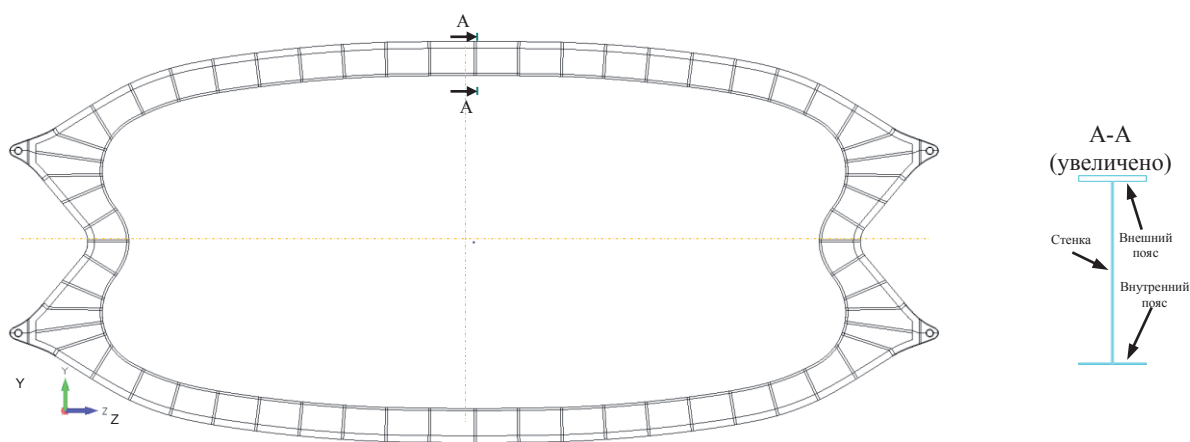


Рисунок 8 – Итоговая схема конструкции

Анализ результатов проектирования конструкции показывает, что значение коэффициента $C_k = 0,832$ меньше чем у балки с прямолинейными поясами на 17%.

Таблица 1 – Весовая сводка спроектированной конструкции

Элементы конструкции	Масса, кг
Внешние пояса	4,78
Боковые пояса	0,56
Внутренний пояс	2,90
Стенка	10,84
Подкрепляющие стойки	3,88
Кронштейны	3,13
Всего	26,1

4 Анализ чувствительности решения

Важным этапом проектирования конструкций является анализ чувствительности функциональных ограничений [19]. Коэффициенты чувствительности позволяют наметить пути совершенствования конструкции с учётом функциональных ограничений.

В ходе решения задачи обнаружено, что добавление материала в зоны стенки с высокими значениями коэффициентов чувствительности ограничений по устойчивости не приводило к повышению критической нагрузки потери устойчивости. В работе [20] подобное явление выявлено при проектировании конструкций по условиям прочности: удаление из конструкции некоторых наиболее нагруженных элементов приводит к более выгодному перераспределению напряжений в ней при сохранении несущей способности и снижении массы. Удаление наиболее нагруженных элементов может быть полезным при проектировании конструкции с учётом требований устойчивости. Удаление этих элементов в статически неопределимых конструкциях повлечёт перераспределение усилий, поэтому данный приём не гарантирует успех во всех проектных ситуациях.

Рассматривается ситуация, возникшая при выполнении анализа КЭМ-3. Коэффициенты чувствительности ограничения по устойчивости балки, нормированные относительно максимального значения, представлены на рисунке 9. По результатам анализа принято решение увеличить размер выреза в стенке за счёт удаления группы конечных элементов стенки с высокими значениями коэффициентов чувствительности по устойчивости. Схема и результаты принятия решения показаны на рисунке 10. Дальнейшая оптимизация распределения материала в элементах конструкции по [17] позволила снизить на 24% массу конструкции при повышении её устойчивости к критической нагрузке. Получено значение $\eta_1=1,02$.

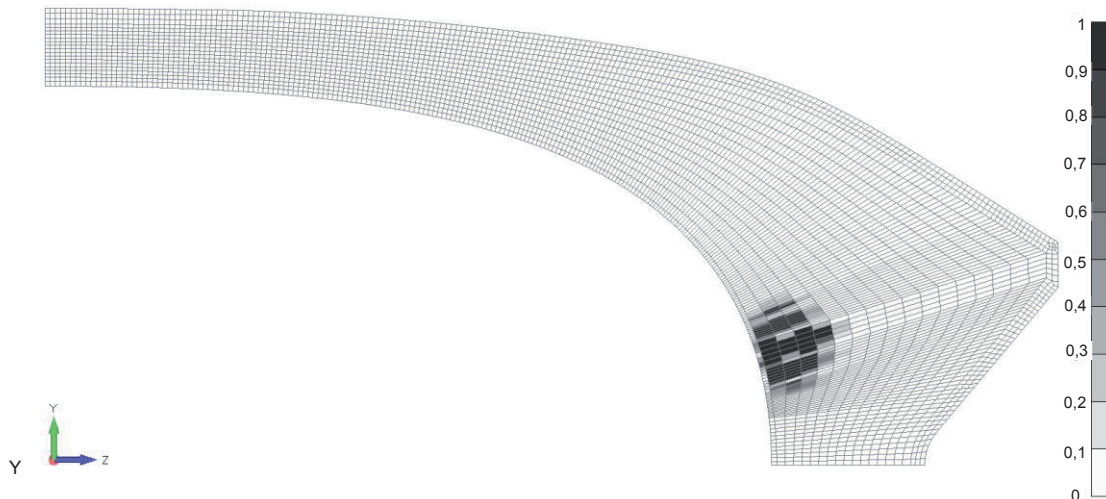


Рисунок 9 – Коэффициенты чувствительности устойчивости конструкции (показаны элементы стенки для четверти КЭМ-3)

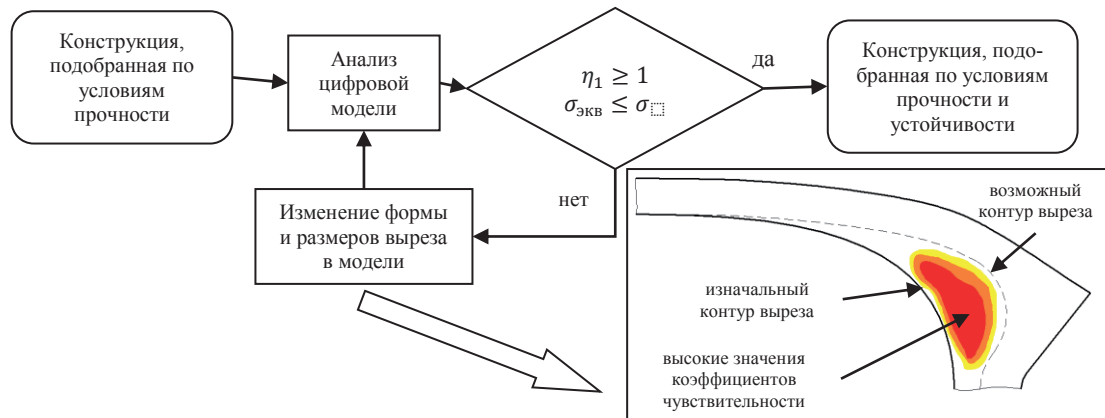


Рисунок 10 – Схема принятия решения при определении границы выреза в конструкции

Заключение

Предложена методика проектирования нагруженных изгибающим моментом конструкций переменной строительной высоты с учётом требований прочности, устойчивости и технологических ограничений.

Применение разработанной методики в рассмотренном примере позволило получить конструкцию, удовлетворяющую условиям прочности и устойчивости, при выигрыше в весовой эффективности около 17%. Выявлена проектная ситуация, в которой удаление из конструкции элементов с высокими значениями коэффициентов чувствительности ограничений по устойчивости позволяет снизить массу конструкции на 24%.

Список источников

- [1] **Комаров В.А.** Проектирование силовых схем авиационных конструкций. *Актуальные проблемы авиационной науки и техники*. 1984. М.: Машиностроение. С.114-129.
- [2] **Marzok A.** Simultaneous sizing and topology optimization of extruded elastic thin-walled beams. *Computers & Structures*. 2025. V.311. No.1. DOI: 10.1016/j.compstruc.2025.107689.
- [3] **Lógó J., Ismail H.** Milestones in the 150-year history of topology optimization: A review. *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*. 2020. V.27. No.2-3. P.97-132. DOI: 10.24423/comes.296.
- [4] **Lin Z., Morandini M.** Topology optimization of isotropic beam cross section accounting for stiffness and strength constraints: Topology optimization of isotropic beam cross section. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2025. V.68. No.245. 24 p. DOI: 10.1007/s00158-025-04185-7.
- [5] **Guo X., Feng H., Hou J. et al.** Geometric Nonlinear Analysis of Timoshenko Beams with Variable Cross-Section Using Co-rotational Formulation. *Wind Energy Science Discussions*. 2025. 18 p. DOI: 10.5194/wes-2025-180.
- [6] **Одинцова С.А.** Исследование безразмерного критерия оценки весовой эффективности конструкций силовых шпангоутов. *Труды МАИ*. 2016. Вып. 85. С.1-18.
- [7] **Болдырев А.В., Золотов Д.В.** Оценка весовой эффективности центроплана магистрального самолёта. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2025. Т.24, №1. С.7-18. DOI: 10.18287/2541-7533-2025-24-1-7-18.
- [8] **Комаров В.А.** Весовой анализ авиационных конструкций: теоретические основы. *Полёт*. 2000. №1. С.31–39.
- [9] **Комаров В.А.** Точное проектирование. *Онтология проектирования*. 2012. №3(5). С.8–23.
- [10] **Болдырев А.В., Комаров В.А.** Применение модели переменной плотности на ранних стадиях проектирования крыльев. *Ученые записки ЦАГИ*. 2011. Т.42. №1. С.94-104.
- [11] **Семёнов В.Н.** Конструкции самолётов замкнутой и изменяемой схем М.: ЦАГИ. 2006. 229 с.
- [12] **Козлов Д.М., Комаров В.А., Майнсков В.Н. и др.** Моделирование конструкции планера самолета для весовых расчетов на ранних стадиях проектирования. *Техника воздушного флота*. 1999. №4-5. С.31-37.
- [13] **Комаров В.А.** Безразмерный критерий силового совершенства конструкций. *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. 2018. Т.53. №4. С.34–47.
- [14] **Болдырев А.В.** Структурная оптимизация силовых конструкций с учетом требований устойчивости. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2012. №1. С.132-140.
- [15] **Болдырев А.В., Золотов Д.В., Кишов Е.А.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025612034 Российская Федерация. Программа для получения равнопрочного распределения материала в комбинированных упругих системах: заявл. 23.12.2024; опубл. 24.01.2025 / заявитель Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева.
- [16] **Рычков С.П.** Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. М.: ДМК Пресс, 2013. 784 с.
- [17] **Storn R., Price K.** Differential Evolution – a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. T11. №4. С.341-359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
- [18] **Wei D., Sarria A., Elgindi M.** Critical Buckling Loads of the Perfect Hollomon's Power-law Columns. *Mechanics Research Communications*. 2013. V.47. No.4. P.69-76. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.09.004.
- [19] **Хог Э., Чой К., Комков В.** Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир. 1988. 428 с.
- [20] **Комаров В.А.** Рациональное проектирование силовых авиационных конструкций: диссертация ... доктора технических наук: 05.07.02. Куйбышев, 1974. 328 с.

Сведения об авторах



Болдырев Андрей Вячеславович, 1963 г. рождения. Окончил Куйбышевский авиационный институт им. С.П. Королёва (КуАИ) в 1986 г., д.т.н. (2012). Заведующий кафедрой конструкции и проектирования летательных аппаратов Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева (Самарского университета), профессор Передовой инженерной аэрокосмической школы Самарского университета. В списке научных трудов более 90 работ в области проектирования летательных аппаратов. ORCID: 0009-0004-6126-3020. boldirev.av@ssau.ru.

Золотов Дмитрий Викторович, 1998 г. рождения. Окончил магистратуру Самарского университета (2022). Ассистент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов Самарского университета. ORCID: 0009-0005-7649-0880. zolotov.dv@ssau.ru. ✉.



Поступила в редакцию 03.06.2026, после рецензирования 29.06.2026. Принята к публикации 10.07.2026.



Rational design of structures subjected to bending moment with strength and stability constraints

© 2026, A.V. Boldyrev, D.V. Zolotov ✉

Samara University (Samara National Research University named after academician S.P. Korolev), Samara, Russia

Abstract

A methodology is proposed for the minimum-mass design of structures subjected to bending moments, with constraints imposed on stresses and critical buckling loads. The design variables include the parameters of the load-bearing configuration as well as the dimensions and cross-sectional shapes of the structural members. At the first stage, the load-bearing configuration of the structure within a prescribed design domain is determined subject to strength constraints using a continuum model represented by a variable-thickness plate. At the second stage, the boundary of a cutout in the structure is determined using the stochastic differential evolution method while satisfying the strength constraints. At the third stage, a variable-cross-section structure is developed with due consideration of strength and stability requirements. Design situations arising during the development of the structure under consideration are discussed, in which decisions must be made on the basis of sensitivity analysis of the stability constraints. A design situation is identified in which removing structural elements characterized by high strain energy values in the critical buckling mode results in a reduction in structural mass. An illustrative example demonstrates the possibility of obtaining a structure with variable structural depth that satisfies both strength and stability requirements while achieving a 17% mass reduction compared with a structure of constant structural depth.

Keywords: design, structure, optimization, bending moment, strength constraints, stability constraints, sensitivity coefficients, decision-making.

For citation: Boldyrev AV, Zolotov DV. Rational design of structures subjected to bending moment with strength and stability constraints [In Russian]. *Ontology of designing*. 2026. 16(3). 528-538. DOI: 10.18287/2223-9537-2026-16-3-528-538.

Authors' contribution: Boldyrev A.V. – development of the article structure, analysis of design situations; Zolotov D.V. – development of the design methodology, calculations, and analysis of results.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

List of figures and table

- Figure 1 – Geometric characteristics of the design domain
- Figure 2 – Beam cross-section
- Figure 3 – Mesh convergence of the finite element model (FEM)
- Figure 4 – Thickness distribution [mm] in the continuum model
- Figure 5 – Strain energy density distribution in the theoretically optimal structure (TOS)
- Figure 6 – FEM-2 after optimization
- Figure 7 – FEM-3 and the finite element model of the bracket
- Figure 8 – Final structural configuration
- Figure 9 – Structural stability sensitivity coefficients (wall elements for one quarter of FEM-3 are shown)
- Figure 10 – Decision-making scheme for determining the cutout boundary in the structure
- Table 1 – Weight summary of the designed structure

References

- [1] Komarov VA. Designing of aircraft structures structural layouts [In Russian]. *Actual problems of aviation science and technology*. Moscow: Mashinostroenie Publishers, 1984: 114-129.
- [2] Marzok A. Simultaneous sizing and topology optimization of extruded elastic thin-walled beams. *Computers & Structures*. 2025; 311(1): 38. DOI: 10.1016/j.compstruc.2025.107689.

- [3] **Lógó J, Ismail H.** Milestones in the 150-year history of topology optimization: A review. *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*. 2020; 27(2-3): 97-132. DOI: 10.24423/comes.296.
 - [4] **Lin Z, Morandini M.** Topology optimization of isotropic beam cross section accounting for stiffness and strength constraints: Topology optimization of isotropic beam cross section. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2025; 68(245): 24 p. DOI: 10.1007/s00158-025-04185-7.
 - [5] **Guo X, Feng H, Hou J. et al.** Geometric Nonlinear Analysis of Timoshenko Beams with Variable Cross-Section Using Co-rotational Formulation. *Wind Energy Science Discussions*. 2025; 18 p. DOI: 10.5194/wes-2025-180.
 - [6] **Odintsova S.A.** Investigation of a dimensionless criterion for evaluating the weight efficiency of strong frame structures. *Trudy MAI*. 2016; 85: 1-18.
 - [7] **Boldyrev AV, Zolotov DV.** Evaluation of mainline aircraft center section weight efficiency. *Vestnik of Samara university aerospace and mechanical engineering*. 2025; 24(1): 7-18. DOI: 10.18287/2541-7533-2025-24-1-7-18.
 - [8] **Komarov V.A.** Weight analysis of aircraft structures: theoretical foundations. *Scientific and technical journal "Polyot" ("Flight")*. 2000; 1: 31-39.
 - [9] **Komarov V.A.** Concurrent design [In Russian]. *Ontology of designing*. 2012; 3(5): 8-23.
 - [10] **Boldyrev AV, Komarov V.A.** Application of the variable density model in the early stages of wing design [In Russian]. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2011; 42(1): 94-104.
 - [11] **Semenov V.N.** Aircraft designs of closed and variable aerodynamic designs [In Russian]. Moscow: TSAGI publishing department, 2006: 229 p.
 - [12] **Kozlov DM, Komarov V.A, Maynskov V.N. et al.** Modeling of the airframe structure for weight calculations in the early stages of design [In Russian]. *Tekhnika vozdushnogo flota*. 1999; 4-5: 31-37.
 - [13] **Komarov V.A.** Dimensionless Criterion of Power Perfection of a Structure [In Russian]. *Mechanics of Solids*. 2018; 4: 34-47.
 - [14] **Boldyrev AV.** Structural optimization of power structures with stability constraints [In Russian]. *Mechanics of Solids*. 2012; 1: 132-140.
 - [15] **Boldyrev AV, Zolotov DV, Kishov E.A.** Certificate of State registration of the computer program No. 2025612034 Russian Federation. A program for obtaining an equally strong material distribution in combined elastic systems; application filed by Samara National Research University named after academician S.P. Korolev 23.12.2024; published 24.01.2025.
 - [16] **Rychkov S.P.** Structural modeling in the Femap environment with NX Nastran [In Russian]. Moscow: DMK Press, 2013: 784 p.
 - [17] **Storn R, Price K.** Differential Evolution – a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997; 11: 341-359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
 - [18] **Wei D, Sarria A, Elgindi M.** Critical Buckling Loads of the Perfect Hollomon's Power-law Columns. *Mechanics Research Communications*. 2013; 47(4): 69-76. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.09.004.
 - [19] **Khog E, Choy K, Komkov V.** Sensitivity analysis in structural design [In Russian]. Moscow, Mir Publishers, 1988: 428 p.
 - [20] **Komarov V.A.** Rational design of aircraft load-carrying structures [In Russian]. Doctor of Technical Sciences dissertation. Kuybyshev, 1974: 328 p.
-

About the authors

Andrey Vyacheslavovich Boldyrev (b. 1963) graduated from the S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (KuAI, USSR) in 1986. Doctor of Technical Sciences (2012). Head of the Department of Aircraft Construction and Design at Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev (Samara University); Professor at the Advanced Aerospace Engineering School of Samara University. He is the author and a co-author of about 90 scientific publications in the field of aircraft design. ORCID: 0009-0004-6126-3020boldirev.av@ssau.ru.

Dmitriy Viktorovich Zolotov (b. 1998) received his Master's degree from Samara University in 2022. Assistant at the Department of Aircraft Construction and Design, Samara University. ORCID: 0009-0005-7649-0880. zolotov.dv@ssau.ru. ✉.

Received June 3, 2026. Revised June 29, 2026. Accepted July 10, 2026.
